J. Sains Dasar 2021 10 (1) 11 - 15

PENYELESAIAN MASALAH PERTURBASI PADA PERSAMAAN DIFUSI KONVEKSI MENGGUNAKAN METODE *FORMAL EXPANSION*

SOLVING PERTURBATION PROBLEM OF CONVECTION-DIFFUSION USING FORMAL EXPANSION METHOD

Destia Nurfadhilah*, Nikenasih Binatari
Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Yogyakarta, Yogyakarta 55281, Indonesia
*email korespondensi: nurfadhilahdestia730@gmail.com, nikenasih@uny.ac.id

Abstrak

Perambatan panas merupakan contoh kasus pemodelan persamaan diferensial parsial yang aplikasinya banyak ditemukan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satunya persamaan difusi konveksi. Dalam penelitian ini, dibahas mengenai penyelesaian masalah perturbasi pada persamaan difusi konveksi menggunakan metode formal expansion. Pada pemodelan digunakan prinsip konservatif dengan asumsi batang logam homogen dan kecepatan fluida bernilai sangat kecil. Syarat batas yang digunakan adalah syarat batas Dirichlet homogen. Metode *formal expansion* dilakukan dengan melakukan pendekatan deret Taylor pada solusi fungsi di sekitar nilai perturbasi sama dengan nol. Dengan menyamakan koefisien pada suku epsilon berpangkat, diperoleh 3 jenis masalah nilai awal syarat batas. Ketiga jenis masalah tersebut kemudian dicari solusi eksak menggunakan metode separasi varibel dan metode ekspansi fungsi eigen. Dari sini, solusi eksak dari persamaan difusi konveksi diperoleh.

Kata kunci: perturbasi, persamaan difusi konveksi, syarat batas *Dirichlet*, metode *formal expansion*

Abstract

Heat propagation is one of modeling problems using partial differential equations whose applications are found in everyday life. One of them is the convection diffusion equation. In this study, we discuss the solution to the perturbation problem in the convection diffusion equation using formal expansion method. In the modeling, conservative principle is used assuming a homogeneous metal rod and a very small fluid velocity. The boundary condition used is the homogeneous Dirichlet boundary condition. The formal expansion method is done by using the Taylor series approach to the solution of the function where the perturbation value is equal to zero. By equating the coefficients on the rank epsilon term, we get 3 types of problems with the initial value of the boundary conditions. The three types of problems are then sought for an exact solution using variable separation method and eigen function expansion method. From this, the exact solution for the convection diffusion equation is obtained.

Keywords: perturbation, convection-diffusion equation, Dirichlet boundary conditions, formal expansion method

Pendahuluan

Ada banyak barang-barang yang menerapkan prinsip perpindahan panas, contoh yang sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari yaitu perabotan rumah tangga. Banyak perabotan rumah tangga yang dirancang (baik keseluruhan atau sebagian) menggunakan prinsip perpindahan panas, misalnya kompor listrik atau gas, sistem pemanas dan sistem pendingin, setrika, bahkan komputer [1]. Dalam penelitian ini dikaji salah satu persamaan pada proses perambatan panas, yaitu persamaan difusi konveksi yang disertai dengan masalah perturbasi. Difusi merupakan peristiwa mengalirnya panas dari daerah yang memiliki konsentrasi tinggi ke daerah yang memiliki konsentrasi lebih rendah, sedangkan konveksi merupakan perpindahan panas yang disebabkan karena adanya fluida yang mengalir [3]. Difusi juga dapat dipandang sebagai perpindahan panas secara konduksi. Pada konduksi yang dipindahkan adalah panas (suhu), sedangkan pada difusi yang dipindahkan adalah panas yang terkonsentrat (konsentrasi) [3]. Di lain pihak, masalah perturbasi merupakan kondisi dimana suatu persamaan memiliki parameter yang sangat kecil, tetapi tidak sama dengan nol [5]. Masalah perturbasi pada persamaan difusi konveksi yang akan dibahas dapat dituliskan seperti pada persamaan (1) berikut.

$$u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) - \varepsilon u_x(x,t) \qquad (1)$$

dengan $u(x,t)$ merupakan konsentrasi suhu (^{0}C) di titik x pada saat t, k adalah koefisien difusi termal (m^2s^{-1}), dan ε menunjukkan velositas atau kecepatan fluida (ms^{-1}) dengan nilai yang sangat kecil ($0 < \varepsilon << 1$). Beberapa aplikasi persamaan difusi konveksi di antaranya terdapat pada sistem sensor, contohnya reaktor pembangkit listrik nuklir yang memiliki *temperature controller* atau pengontrol suhu. Pengontrol suhu tersebut akan mengalirkan air pada reaktor agar suhu tetap normal. Aplikasi lain juga dapat ditemukan di kendaraan pada *water cooler*.

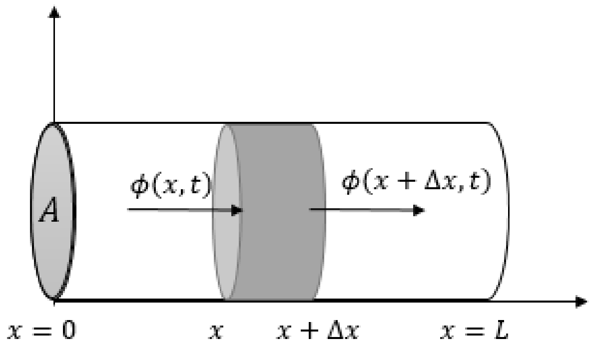
Penyelesaian persamaan difusi konveksi telah dilakukan oleh banyak peneliti sebelumnya yang mengkaji persamaan difusi konveksi tanpa permasalahan perturbasi menggunakan metode Galerkin-Beda Hingga dan metode separasi variabel [2][4]. Sedangkan permasalahan perturbasi pada persamaan difusi konveksi telah dikaji oleh Yuzbasi dan Karacayir [6] yang membahas permasalahan perturbasi pada persamaan parabolik difusi konveksi satu dimensi, dengan parameter yang bernilai sangat kecil terletak pada kasus difusinya. Solusi yang dipaparkan merupakan solusi numerik menggunakan metode Galerkin. Dari beberapa penelitian yang telah dilakukan sebelumnya, dalam penelitian ini akan dibahas mengenai penyelesaian masalah perturbasi pada persamaan difusi konveksi secara analitik menggunakan metode *formal expansion*, dengan masalah perturbasi pada kasus konveksinya.

Metode Penelitian

Beberapa tahapan dalam analisis yang digunakan dalam penelitian ini adalah pengkajian pustaka, pengaplikasian metode *formal expansion*, mengklasifikasi setiap persamaan differensial parsial berdasarkan orde, kelineearitasan, dan kehomogenan persamaan untuk kemudian dicari solusinya. Setelah diperoleh banyak solusi persamaan differensial parsial, selanjutnya solusi-solusi tersebut disubstitusikan ke dalam pemisalan solusi *formal expansion*. Proses ini merupakan tahap akhir analisis, yaitu diperoleh solusi masalah perturbasi pada persamaan difusi konveksi.

Hasil dan Pembahasan

Pemodelan persamaan difusi konveksi melibatkan dua persamaan, yaitu persamaan difusi dan persamaan konveksi. Penurunan model persamaan difusi dilakukan dengan mengambil batang logam yang dialiri energi panas seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Batang logam homogen

Beberapa asumsi yang digunakan, dalam penelitian ini yaitu (i) aliran panas yang mengalir pada batang logam hanya mengalir dari suhu yang lebih tinggi ke suhu yang lebih rendah, (ii) seluruh permukaan batang logam terisolasi, (iii) tidak ada aliran panas yang dihasilkan pada batang logam, (iv) batang logam yang digunakan homogen, dan (v) massa jenis dan konduksi termal pada bahan logam dianggap konstan, artinya massa jenis dan konduksi termal pada kesuluruhan logam sama. Sementara itu, batang logam dengan panjang L dipartisi sebesar Δx dan dipilih sembarang interval $[x, x+\Delta x]$. Misalkan panas jenis (e) merupakan jumlah energi panas tiap satuan volume, maka jumlah energi panas pada interval $[x, x+\Delta x]$ adalah $e(x,t)A\Delta x$. Fluks ($\phi(x,t)$) merupakan jumlah energi panas tiap satuan waktu yang mengalir tiap satuan area.

Fluks masuk dan keluar dinotasikan dengan $\phi(x,t)A$ dan $\phi(x+\Delta x,t)A$. Menurut prinsip konservasi energi diperoleh persamaan (2) berikut.

$$(e(x,t)A\Delta x)_t \approx \phi(x,t)A - \phi(x+\Delta x,t)A \qquad (2)$$

Bagi kedua ruas pada persamaan (2) dengan $A\Delta x$, sehingga diperoleh persamaan (3) berikut.

$$e_t(x,t) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\phi(x,t)-\phi(x+\Delta x,t)}{\Delta x} \qquad (3)$$

Dari sini diperoleh persamaan (4) berikut.

$$e_t(x,t) = \phi_x(x,t) \qquad (4)$$

Berdasarkan hasil percobaan Fourier $\phi = -K_0 u_x$ dan hubungan panas jenis dengan suhu $e(x,t) = c\rho u(x,t)$, diperoleh persamaan difusi yang bersesuaian seperti yang ditunjukkan pada persamaan (5) berikut.

$$u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) \qquad (5)$$

dengan $k = \frac{K_0}{c\rho}$. Penurunan model persamaan konveksi diasumsikan bahwa di dalam batang mengalir fluida dengan velositas υ. Berdasarkan rumus fluks konveksi, maka diperoleh persamaan konveksi seperti yang ditunjukkan pada persamaan (6) berikut.

$$u_t(x,t) = -\upsilon u_x(x,t). \tag{6}$$

Pada kasus difusi konveksi, maka model diperoleh dengan menggabungkan kedua kasus di atas. Akibatnya persamaan difusi konveksi tergeneralisasi menjadi persamaan (7) berikut.

$$u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) - \upsilon u_x(x,t) \tag{7}$$

Masalah perturbasi diartikan sebagai gangguan pada sistem fisik, yaitu keadaan di mana terdapat konstanta/parameter yang bernilai sangat kecil, tetapi tidak sama dengan nol. Apabila konveksi pada kasus difusi konveksi merupakan gangguan dan keberadaannya tidak diabaikan, maka masalah perturbasi pada persamaan difusi konveksi dituliskan sebagai persamaan (8) berikut.

$$u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) - \varepsilon u_x(x,t) \tag{8}$$

dengan $0 < \varepsilon << 1$. Nilai awal dan syarat batas yang digunakan yaitu $u(x, 0) = f(x)$, $0 < x < L$ dan $u(0,t) = u(L,t) = 0$, $t > 0$.

Masalah perturbasi pada persamaan difusi konveksi menggunakan metode ekspansi formal diselesaikan melalui 4 langkah berikut.

Langkah 1. Memisalkan fungsi solusi $u(x,t)$ menjadi bentuk fungsi ekspansi formal, yaitu ekspansi pangkat atas ε. Adapun persamaannya dapat ditunjukkan pada persamaan (9) berikut.

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \varepsilon u_1(x,t) + \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x,t) \tag{9}$$

Langkah 2. Mensubstitusikan fungsi solusi pada persamaan (9) ke dalam persamaan (8), nilai awal, dan syarat batas. Hasil substitusi dari fungsi solusi ke dalam

- persamaan difusi konveksi dapat ditunjukkan seperti pada persamaan (10) berikut.

$$\begin{aligned} &u_{0t}(x,t) + \varepsilon u_{1t}(x,t) + \varepsilon^2 u_{2t}(x,t) + \cdots \\ &= k[u_{0xx}(x,t) + \varepsilon u_{1xx}(x,t) + \varepsilon^2 u_{2xx}(x,t) + \cdots] \\ &-\varepsilon[u_{0x}(x,t) + \varepsilon u_{1x}(x,t) + \varepsilon^2 u_{2x}(x,t) + \cdots] \end{aligned} \tag{10}$$

- nilai awal dapat ditunjukkan seperti pada persamaan (11) berikut.

$$u_0(x,0) + \varepsilon u_1(x,0) + \varepsilon^2 u_2(x,0) + \cdots = f(x) \tag{11}$$

- syarat batas dapat ditunjukkan seperti pada persamaan (12) dan persamaan (13) berikut.

$$u_0(0,t) + \varepsilon u_1(0,t) + \varepsilon^2 u_2(0,t) + \cdots = 0 \tag{12}$$
$$u_0(L,t) + \varepsilon u_1(L,t) + \varepsilon^2 u_2(L,t) + \cdots = 0 \tag{13}$$

Dengan menggunakan prinsip polinomial atas variabel ε, koefisien polinomial yang bersesuaian pada kedua ruas harus bernilai sama. Dari sini diperoleh tak hingga banyak masalah nilai awal syarat batas yang bersesuaian dengan order epsilon.

- Order 1, $O(1)$ dapat ditunjukkan seperti pada persamaan (14) berikut.

$$\begin{aligned} &u_0(x,t) - ku_{0xx}(x,t) = 0 \\ &u_0(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L \\ &u_0(0,t) = u_0(L,t) = 0, \ t > 0 \end{aligned} \tag{14}$$

- Order epsilon, $O(\varepsilon)$ dapat ditunjukkan seperti pada persamaan (15) berikut.

$$\begin{aligned} &u_{1t}(x,t) - ku_{1xx}(x,t) = -u_{0x}(x,t) \\ &u_1(x,0) = 0, \quad 0 < x < L \\ &u_1(0,t) = u_1(L,t) = 0, \ t > 0 \end{aligned} \tag{15}$$

- Order epsilon kuadrat dst, $O(\varepsilon^n)$.

$$\begin{aligned} &u_{it}(x,t) - ku_{ixx}(x,t) = -u_{(i-1)xx}(x,t) \\ &u_i(x,0) = 0, \quad 0 < x < L \\ &u_i(0,t) = u_i(L,t) = 0, \ t > 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Langkah 3. Menyelesaikan tak hingga PDP yang diperoleh dari langkah 2. Tiap-tiap PDP diklasifikasikan terlebih dahulu, kemudian ditentukan metode yang tepat untuk menyelesaikan permasalahan setiap PDP. Persamaan (14) merupakan PDP linear homogen dengan syarat batas homogen. Dengan menggunakan metode separasi variabel diperoleh solusi seperti yang ditunjukkan pada persamaan (17) berikut.

$$u_0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \tag{17}$$

Di mana koefisien dari solusi ini didapatkan dari sifat orthogonalitas fungsi sinus. Jadi, diperoleh persamaan (18) berikut.

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\, sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \tag{18}$$

Selanjutnya, substitusikan solusi ini ke persamaan (15). Persamaan (15) merupakan PDP linear non homogen dengan nilai awal dan syarat batas homogen. Metode yang digunakan yaitu metode ekspansi fungsi eigen. Fungsi eigen yang dipilih disesuaikan dengan pembuat non homogen persamaannya. Fungsi eigen yang didapat yaitu $sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, tetapi karena basis u_{0x} adalah cos, penentuan fungsi eigen dengan basis sin menjadi tidak tepat. Perbedaan basis ini membuat penyelesaian pada langkah-langkah selanjutnya tidak ditemukan. Agar dapat menyelesaikan persamaan (15), basis fungsi eigen yang akan digunakan adalah $cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Dengan menggunakan basis cosinus, solusi $u_1(x, t)$ yang diperoleh yaitu seperti yang ditunjukkan pada persamaan (19) berikut.

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{1n}(t)\, cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

dengan

$$u_{1n}(t) = \frac{-C_n}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 (k-1)}\left(e^{-\left(\frac{n\pi x}{L}\right)^2 t} - e^{-k\left(\frac{n\pi x}{L}\right)^2 t}\right) \tag{19}$$

Selanjutnya, solusi ini disubstitusikan ke dalam persamaan (16) untuk mencari solusi persamaan (16). Persamaan ketiga sampai dengan tak hingga memiliki bentuk persamaan dan klasifikasi yang sama yaitu PDP linear non homogen dengan nilai awal dan syarat batas homogen. Metode yang digunakan yaitu metode ekspansi fungsi eigen. Dalam bentuk umum, solusi $u_i(x,t)$ untuk i = 2, 3, … dapat ditunjukkan seperti pada persamaan (20) berikut.

$$u_i(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{in}(t)\, cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

dengan

$$u_{in}(t) = \int_0^t e^{k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2(\tau - t)} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 u_{(i-1)n}(\tau)d\tau \tag{20}$$

$$u_{(i-1)n}(t) = \int_0^t u_{(i-1)}(x,t)\, cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Langkah 4. Substitusikan persamaan (17), (19), dan (20) ke dalam persamaan (9), sehingga diperoleh solusi khusus untuk masalah perturbasi pada persamaan difusi konveksi seperti yang ditunjukkan pada persamaan (21) berikut.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0(x,t) + \varepsilon u_1(x,t) + \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x,t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \\ &+\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} u_{1n}(t)\, cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon^i \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_{in}(t)\, cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] \end{aligned} \tag{21}$$

dengan

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\, sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$u_{1n}(t) = \frac{-C_n}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 (k-1)}\left(e^{-\left(\frac{n\pi x}{L}\right)^2 t} - e^{-k\left(\frac{n\pi x}{L}\right)^2 t}\right)$$

$$u_{in}(t) = \int_0^t e^{k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2(\tau - t)} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 u_{(i-1)n}(\tau)d\tau$$

$$u_{(i-1)n}(t) = \int_0^t u_{(i-1)}(x,t)\, cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

untuk setiap n bilangan bulat positif dan i bilangan bulat lebih dari 1.

Kesimpulan

Dari pembahasan pada bagian sebelumnya, solusi eksak untuk masalah perturbasi pada persamaan difusi konveksi dengan syarat batas Dirichlet homogen dapat dicari menggunakan metode *formal expansion*. Pada penelitian selanjutnya dapat dibahas mengenai kestabilan sistem pada periode waktu lama atau dapat pula diteliti masalah perturbasi pada persamaan difusi konveksi non homogen dengan jenis syarat batas yang lain.

Ucapan Terima Kasih

Ucapan terima kasih diberikan kepada Bapak Dr. Hartono dan Ibu Fitriana Yuli Saptaningtyas, M.Si atas saran dan masukannya.

Daftar Pustaka

[1] Cengel, Y. A., & Ghajar, A. J. (2015). *Heat and mass transfer: Fundamentals & applications: 5th edition*. McGraw-Hill Education.

[2] Fadilah, L. A. (2019). Penyelesaian numerik persamaan difusi konveksi 1D menggunakan metode Galerkin-Beda Hingga. *Skripsi*. UIN Maulana Malik Ibrahim, Malang

[3] Logan, J. D. (2015). *Applied partial differential equations: 3rd edition.* Springer International Publishing.

[4] Roziana, D. F. (2008). Solusi analitik dan solusi numerik persamaan difusi konveksi. *Skripsi*. UIN Maulana Malik Ibrahim, Malang.

[5] O'Leary, S. K., Foutz, B. E., Shur, M. S., Bhapkar, U. V., & Eastman L. F. (1998). Monte Carlo simulation of electron transport in wurtzite aluminium nitride. *Solid State Communications*,*105*(10), 621-626.

[6] Verhulst, F. (1996). *Nonlinear differential equation and dynamical systems: 2nd edition.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[7] Yuzbasi, S., & Karacayur, M. (2019). An approximation technique for solutions of singularly perturbed one-dimensional convection-difusion problem. *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields, 33*(1), 17-24.