STUDI AWAL PENERAPAN ALJABAR MAX PLUS PADA SISTEM PENYIMPANAN TERDISTRIBUSI MELALUI *NETWORK CODING*

PRELIMINARY STUDY ON APPLICATION OF MAX PLUS ALGEBRA IN DISTRIBUTED STORAGE SYSTEM THROUGH NETWORK CODING

Agus Maman Abadi*, Musthofa, dan Emut

Jurusan Pendidikan Matetmatika, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, Karangmalang, Yogyakarta, 55281
*email: agusmaman@uny.ac.id

diterima 2 Desember 2014, disetujui 3 Maret 2015

Abstrak

Peningkatan kebutuhan akan sebuah cara untuk menyimpan data dalam jumlah yang besar menghadirkan sebuah tantangan baru. Salah satu cara untuk menghadapi tantangan ini adalah menggunakan sistem penyimpanan data terdistribusi (*Distributed Storaged Systems*). Salah satu strategi yang diterapkan dalam sistem penyimpanan data terdistribusi adalah menggunakan *Erasure Code* yang diaplikasikan pada *network coding*. Kode yang digunakan pada teknik ini didasarkan pada struktur aljabar berupa ruang vektor. Beberapa penelitian juga telah dilakukan untuk membuat kode yang didasarkan pada struktur aljabar lain, yaitu modul. Pada penelitian ini dicoba dibentuk suatu kode yang didasarkan pada struktur aljabar yang merupakan generalisasi dari modul, yaitu semimodul dengan memanfaatkan operasi max dan operasi penjumlahan pada aljabar max plus. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa operasi max dan operasi penjumlahan pada aljabar max plus belum dapat digunakan untuk membentuk suatu kode semimodule, namun dengan memodifikasi operasi “+” sebagai operasi “ min”, dapat dibentuk suatu kode yang didasarkan pada semimodul.

Kata kunci: kode, sistem penyimpanan data terdistribusi, network coding, semimodul, aljabar max plus

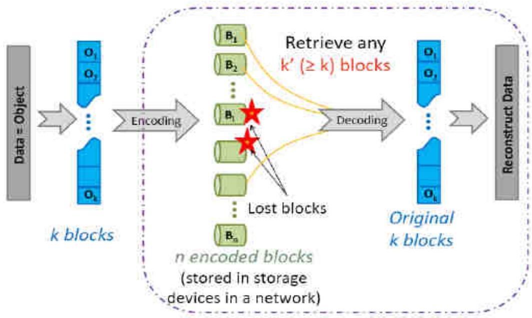
Abstract

The increasing need in techniques of storing big data presents a new challenge. One way to address this challenge is the use of distributed storage systems. One strategy that implemented in distributed data storage systems is the use of Erasure Code which applied to network coding. The code used in this technique is based on the algebraic structure which is called as vector space. Some studies have also been carried out to create code that is based on other algebraic structures such as module. In this study, we are going to try to set up a code based on the algebraic structure which is a generalization of the module that is semimodule by utilizing the max operations and sum operations at max plus algebra. The results of this study indicate that the max operation and the addition operation on max plus algebra cannot be used to establish a semimodule code, but by modifying the operation "+" as "min", we get a code based on semimodule.

Keywords: code, distributed storage systems, network coding, semimodule, max plus algebra

Pendahuluan

Perkembangan teknologi informasi khususnya dalam hal penggunaan data berukuran besar seperti video, gambar dan jejaring sosial telah melahirkan tantangan baru, yaitu bagaimana strategi untuk mengelola data yang sedemikian besar tersebut. Menurut [1], sebuah penelitian yang dilakukan pada tahun 2011 menyatakan bahwa setiap dua tahun data di dunia ini meningkat menjadi lebih dari dua kali lipat dan mencapai 1,8 zettabytes (1 zsettabyte = 10^{21} byte). Jika data tersebut disimpan dalam DVD, maka tumpukannnya bisa mencapai jarak bumi ke bulan. Salah satu cara untuk menghadapi tantangan ini adalah menggunakan sistem penyimpanan data terdistribusi (*Distributed Storaged Systems* (DSS)). Melalui DSS ini data akan dipecah-pecah kemudian disimpan dalam sistem penyimpanan. Salah satu strategi yang diterapkan dalam DSS adalah menggunakan *Erasure Code* yang diaplikasikan pada *network coding*. Melalui DSS, data dipecah-pecah dan kemudian disimpan dalam sistem penyimpanan terdistribusi yang terkoneksi melalui sistem jaringan komunikasi. Masalah yang terjadi dalam DSS adalah selalu terjadi bagian penyimpan data (*node*) yang gagal atau error. Oleh karena itu proses perbaikan data secara sistematis menjadi perhatian utama. Berikut skema sistem DSS dalam [1]:



Gambar 1. Sistem Penyimpanan terdistribusi (DSS)

Beberapa penelitian yang telah dilakukan pada masalah ini antara lain :

1) Pada tahun 2012, Tanakorn Chareonvisal melakukan simulasi DSS menggunakan beberapa metode seperti replicating code dan regenerating code yang semuanya didasarkan pada struktur aljabar ruang vektor atas lapangan.
2) Pada tahun 2013, Arvind Kumar Sinha memperkenalkan penggunaan struktur aljabar "modul" untuk mendesain kode.

Berdasarkan latar belakang di atas diidentifikasi beberapa strategi dalam penerapan struktur aljabar pada pembentukan kode. Artikel ini melaporkan tentang peluang penggunaan struktur aljabar yang lebih umum, yaitu semimodul atas aljabar max plus untuk membentuk kode.

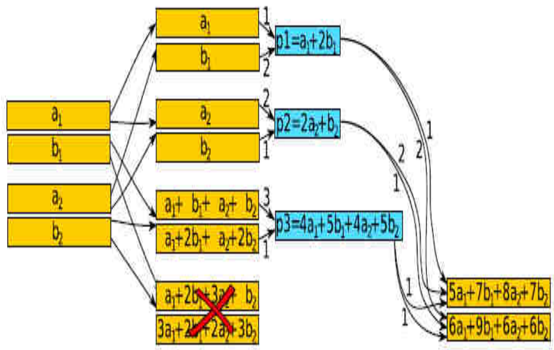
Meningkatnya penggunaan media penyimpanan data seiring dengan meningkatnya penggunaan email, foto, video dan data-data berukuran besar lainya membutuhkan solusi yang tidak mudah.Jika data-data tersebut disimpan dalam satu tempat, maka akan sangat berbahaya dikarenakan media penyimpanan dapat rusak sehingga mengakibatkan hilangnya data.

Solusi yang dapat dilakukan untuk mengatasi hal tersebut antara lain [6]: menyimpan data dengan menyediakan cadangan data dalam banyak media penyimpana (disk). Jika salah satu disk mengalami kerusakan, maka tinggal mengganti disk tersebut denga yang baru sehingga data bisa terselamatkan. Teknik ini dinamakan sistem penyimpanan terdistribusi (*distributed storage system* (DSS)).

Namun, masalah yang terjadi tidaklah sesederhana ini. Pusat data yang akan menyimpan data dalam jumlah besar membutuhkan banyak sekali piranti penyimpan. Akibatnya kerusakan pada piranti penyimpan menjadi hal yang tak terhindarkan yang dapat menimbulkan masalah baru. Oleh karena itu diperlukan strategi dalam mengelola penyimpanan data.

Network coding adalah suatu pendekatan untuk meningkatkan efisiensi dari proses komunikasi [3]. *Network coding* adalah suatu bagian (node) dalam proses komunikasi yang terletak di antara sumber data (*source*) dan penerima (*receiver*) yang selain mampu menyimpan dan meneruskan data, juga mampu mengkombinasikan secara independen data yang masuk menjadi data yang siap dikirim.

Melalui *network coding*, bagian penyimpan data yang rusak dalam sistem DSS, diperbaiki dengan langkah-langkah tertentu. Skema dari *network coding* dalam [5] adalah sebagai berikut :



Gambar 2. *Network Coding* dalam DSS

Penggunaan *Network Coding* dapat meningkatkan meningkatkan *Troughput* , yaitu kapasitas informasi yang dialirkan melalui jaringan yang diukur dengan satuan waktu tertentu dan kondisi jaringan tertentu.

Berikut ini beberapa definisi yg berkaitan dengan struktur aljabar.

__Definisi 1__

Diberikan ring R dan grup komutatif $(M, +)$ dan pemetaan $f : R \times M \to M$ yang memenuhi:

1) $r\,(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$,
2) $(r_1 + r_2)\, m = r_1 m + r_2 m$,
3) $(r_1 r_2)\, m = r_1\,(r_2\, m)$,

untuk setiap $r, r_1, r_2 \in R$ dan $m, m_1, m_2 \in M$. M dinamakan modul(kiri) atas ring R.

Definisi 2

Suatu himpunan $H \subseteq M$ dinamakan submodul dari M jika memenuhi :

1) $h_1 + h_2 \in H$, untuk setiap $h_1, h_2 \in H$
2) $rh \in H$, untuk setiap $h \in H$ dan $r \in M$.

Definisi 3

Suatu semiring $(S,\oplus,\otimes)$ adalah himpunan tak kosong S disertai dengan dua operasi biner $\oplus$ dan $\otimes$ yang memenuhi aksioma berikut :

1) $(S,\oplus)$ merupakan monoid komutatif dengan elemen netral ε, yaitu
   $\forall$ x,y,z $\in$ S memenuhi
   $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$
   $x \oplus y = y \oplus x$
   $x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x$
2) $(S,\otimes)$ merupakan monoid dengan elemen satuan e, yaitu $\forall$ x,y,z $\in$ S memenuhi
   $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$
   $x \otimes e = e \otimes x = x$
3) Elemen netral ε merupakan elemen penyerap terhadap operasi $\otimes$, yaitu
   $\forall x \in S, \varepsilon \otimes x = x \otimes \varepsilon = \varepsilon$.
4) Operasi $\otimes$ bersifat distributif terhadap operasi $\oplus$, yaitu
   $\forall$ x,y,z $\in$ S berlaku
   $(x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$
   $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$

Definisi 4

Semimodul kiri atas semiring (S, $\oplus$, $\otimes$) adalah himpunan monoid komutatif $(M,\oplus)$ yang dilengkapi operasi eksternal yaitu pemetaan pergandaan skalar (kiri):

$$f : S \times M \to M$$

dan memenuhi aksioma-aksioma:

($\forall x,y \in M$) da($\forall r,s \in S$)

1) $r (x \oplus y) = rx \oplus ry$
2) $(r \oplus s) x = rx \oplus sx$
3) $r (sx) = (rs)x$

Selanjutnya subsemimodul didefinisikan seperti submodul.

Misalkan B = { 0,1} dan $B^2 = Z_2\ Z_2$ = {00, 01, 10, 11}. Didefinisikan operasi biner pada B dan B^2 sebagai operasi penjumlahan modulo 2. Sebagai contoh 01 + 10 = 11, 11 + 11 = 00, dan seterusnya. Berikut sifat dari himpunan ini.

Teorema 5.

Jika $B^n = Z_2\ Z_2 \dots Z_2$ (sebanyak n), maka (B^n, +) dengan + menyatakan operasi penjumlahan modulo 2 merupakan modul atas B = { 0, 1}.

Bukti :

1) Jelas bahwa B^n merupakan grup komutatif.
2) $(B, +, \times)$ = ({ 0, 1}, + , $\times$) merupakan ring
3) Untuk setiap m, m_1, $m_2 \in B^n$ dan r, r_1 , r_2, $\in$ B, berlaku sifat:
   a) $r (m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$,
   b) $(r_1 + r_2) m = r_1m + r_2m$,
   c) $(r_1 r_2) m = r_1 (r_2 m)$

Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode penelitian studi literatur berupa jurnal-jurnal ilmiah yang terkait dengan topik penelitian, dan buku-buku referensi yang mendukung. Pada tahap awal dipelajari konsep-konsep dasar tentang *distributed storage system* (DSS) dan *network coding* serta pengkonstruksian kode menggunakan *linear network coding*. Konsep-konsep ini nantinya digunakan sebagai dasar untuk membentuk kode dengan menerapkan sifat-sifat pada aljabar max plus.

Selanjutnya, dipelajari beberapa kelemahan pada *linear network coding* yang telah diberikan oleh Dougherty *et al*. [8]. Langkah berikutnya adalah mempelajari pengkontruksian secara aljabar dari *linear network coding* dalam [9], yang akan digunakan sebagai dasar untuk memodifikasi metode yang sudah ada.

Langkah terakhir adalah menerapkan hasil-hasil yang diperoleh untuk membuat rancangan algoritma untuk membentuk suatu teknik pengkodean berdasarkan operasi dan sifat-sifat dalam aljabar max.

Hasil dan Pembahasan

Awal bagian ini akan terlebih dahulu membahas tentang kode modul seperti yang dibahas dalam [2].

A. Kode Modul

Berikut ini diberikan suatu definisi kode modul yang dikembangkan dari [2].

Definisi 6

Misalkan M_1 dan M_2 adalah suatu modul atas ring R dan E: $M_1 \to M_2$ adalah suatu fungsi encoding.

Suatu kode $C = E(M_1)$ dinamakan kode modul jika $E(M_1)$ merupakan submodul dari M_2.

Contoh 7
Diberikan modul B^2 = { 00, 01, 10, 11} dan B^5 = {00000, 10000, 10001, 10011, 10010, 10101, 10110, 10111, 11000, 11001, 11010, 11011, 11100, 11100, 11101, 11110, 00001, 00011, 00010, 00100, 00110, 00111, 01000, 01001, 01010, 01011, 01100, 01101, 01110, 01110, 01111, 11111}.
terhadap operasi penjumlahan modulo 2 dan pergandaaan skalar atas $B = \{0,1\}$.
Selanjutnya didefinisikan fungsi encoding $E: B^2 \rightarrow B^5$ sebagai :

$E(00) = 00000$
$E(01) = 01110$
$E(10) = 10101$
$E(11) = 11011$

$E(B^2)$ merupakan suatu submodul dari B^5 sebab :

1) Tertutup terhadap penjumlahan, yaitu:
   01110 + 10101= 11111
   01110 + 11011 =10101
   10101 + 11011 = 01110
   01110 + 01110 = 00000
   10101 + 10101 = 00000
   11011 + 11011 = 00000
   11011 + 11011 = 00000
2) Tertutup terhadap perkalian skalar { 0, 1}, yaitu
   $0 \times (10101) = 00000$ dan
   $1 \times (10101) = 10101$

Jadi, $E(B^2)$ = { 00000, 01110, 10101, 11011} di atas adalah kode modul sebab merupakan submodul dari B^5.

Contoh 8
Diberikan B^2 dan B^4 seperti pada contoh 4.2.
Didefinisikan fungsi enkoding $E : B^2 \rightarrow B^4$ sebagai berikut :

E(00) = 0000
E(01) = 0101
E(10) = 1010
E(11) = 1111

$E(B^2)$ = { 0000, 0101, 1010, 1111} merupakan submodul dari B^4 sebab:

1) Tertutup terhadap penjumlahan, yaitu:
   0101 + 1010 = 1111
   1010 + 1111 = 0101
   0101 + 1111 = 1010
   0101 + 0101= 0000
   1010 + 1010 = 0000
   1111 + 1111 = 0000
2) Tertutup terhadap perkalian skalar $B = \{0, 1\}$, yaitu :
   $1\times(1010) = 1010$
   $0\times(1010) = 0000$

Jadi, $E(B^2)$ = {0000, 1010, 0101, 1111} merupakan kode modul.

B. *Kode Semimodul*

Berdasarkan hasil di atas, dicoba dikembangkan suatu kode yang didasarkan atas operasi maximum dan operasi penjumlahan yang diinspirasi oleh struktur aljabar max plus yang merupakan semimodul sebagai berikut :
Jika pada himpunan B^2 = {00, 01, 10,11} didefinisikan suatu operasi $\oplus$ = max dan $\otimes$ = penjumlahan modulo2, maka akan menghasilkan fakta berikut :

1) $(B^2, \oplus)$ merupakan monoid komutatif
2) $(B^2, \otimes)$ merupakan monoid komutatatif
3) Sifat distributive $\otimes$ terhadap terhadap $\oplus$ **tidak terpenuhi**, misal:
   $01 \otimes (01 \oplus 01) = 01 \otimes 11 = 01 + 11 = 10$
   $(01 \otimes 01) \oplus (01 \otimes 01) = 00 \oplus 00 = 00$

Karena sifat distributifnya gagal, maka dicoba dikembangkan pada operasi yang mirip dengan aljabar max plus, yaitu untuk operasi $\otimes$ didefinisikan sebagai $\otimes$ = min. Diperoleh hasil sebagai berikut :

1) $(B^2,\oplus)$ merupakan monoid komutatif
2) $(B^2,\otimes)$ merupakan monoid komutatif
3) Sifat distributive berlaku, yaitu :
   $00 \otimes (01 \oplus 10) = 00 \otimes 11 = 00 = (00 \otimes 01) \oplus (00 \otimes 10)$
   $10 \otimes (01 \oplus 10) = 10 \otimes 11 = 10 = (10 \otimes 01) \oplus (10 \otimes 10)$
   $01 \otimes (01 \oplus 10) = 01 \otimes 11 = 01 = (01 \otimes 01) \oplus (01 \otimes 10)$
   $11 \otimes (01 \oplus 10) = 11 \otimes 11 = 11 = (11 \otimes 01) \oplus (11 \otimes 10)$

Berdasaran hasil ini, kemudian dapat didefinisikan **kode semimodul** sebagai berikut:

Definisi 9
Misalkan S_1 dan S_2 adalah suatu semimodul atas semiring R dan $E: S_1 \rightarrow S_2$ adalah suatu fungsi encoding. Suatu kode $C = E(S_1)$ dinamakan kode semimodul jika $E(S_1)$ merupakan subsemimodul dari S_2.

Contoh 10
Diberikan himpunan (B^2,⊕), (B^4,⊕) yang keduaya merupakan semimodul atas semiring (B,⊕,⊗) dengan fungsi encoding E : $B^2 \rightarrow B^4$ didefinisikan sebagai :

E(00) = 0000
E(01) = 0101
E(10) = 1010
E(11) = 1111.

$C = E(B^2)$ = {0000, 0101, 1010, 1111} merupakan subsemimodul dari B^4 sebab :

1) Tertutup terhadap operasi ⊕ = max
   0101 ⊕ 1010 = 1111
   0101 ⊕ 1111 = 1111
   1010 ⊕ 1111 = 1111
   1111 ⊕ 1111 = 1111
   dst

2) Tetutup terhadap perkalian skalar di *B*
   1 ⊗ (1010) = 1010
   0 ⊗ (1010) = 0000

Jadi, *C* = {0000, 0101, 1010, 1111} merupakan kode semimodul.

Contoh 11
Diberikan semimodul (B^2,⊕) dan (B^5,⊕) atas semiring (B, ⊕, ⊗)
Selanjutnya didefinisikan fungsi encoding E: $B^2 \rightarrow B^5$ sebagai :

E(00) = 00000
E(01) = 01110
E(10) = 10101
E(11) = 11011

$E(B^2)$ merupakan suatu subsemimodul dari B^5 sebab :

1) Tertutup terhadap penjumlahan (operasi max), yaitu:
   01110 ⊕ 10101= 11111
   01110 ⊕ 11011 =11111
   10101 ⊕ 11011 = 11111
   01110 ⊕ 01110 = 01110

   10101 ⊕ 10101 = 10101
   11011 ⊕ 11011 = 11011
   11011 ⊕ 11011 = 11011
2) Tertutup terhadap perkalian skalar di B, yaitu
   0 ⊗ (10101) = 00000 dan
   1 ⊗ (10101) = 10101

Jadi, $C = E(B^2)$ = {00000, 01110, 10101, 11011} di atas adalah kode semimodul.

Simpulan

Penelitian ini merupakan pengkajian dari penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Arvind Kumar Sinha [2], yaitu tentang kode yang didasarkan pada struktur aljabar modul. Aljabar max plus yang telah dikenal luas dapat dipandang sebagai semimodul, namun pada hasil penelitian ini belum berhasil untuk membentuk kode. Oleh karena itu, pada penelitian ini telah dikaji tentang struktur aljabar (B^m, max) yang merupakan semimodul atas semiring (*B*, max, min) dapat digunakan dalam pembentukan kode yang dalam kajian ini dinamakan kode semimodul.

Ucapan Terima Kasih

Tim Peneliti mengucapkan terimakasih kepada Universitas Negeri Yogyakarta, khususnya Fakultas MIPA yang telah mendanai kegiatan penelitian ini.

Pustaka

[1] Oggier F. (2013) *On Coding Techniques for Networked Distributed Storage Systems*. First European Training School on Network Coding, Barcelona.
[2] Sinha A.K. (2013) Application of Module Structure of Algebra in Coding Theory in Different Branches of Engineering, *International Journal of Scientific Engineering and Technology*, 2, 4, 295.
[3] Oggier F., Datta. A. (2012) *Coding Techniques for Repairability in Networked Distributed Storage Systems*.
[4] Chareonvisal T. (2012) *Implementing Distributed Storage System by Network Coding in Presence of Link Failure*. Master Thesis Report.
[5] Dimakis A. G., Godfrey P. B., Wu Y., Wainwright M. J., and Ramchandran K. (2010) Network coding for distributed storage systems, *IEEE Trans. on Info. Theory*.
[6] Dimakis A. G., Ramchandran K., Wu Y., and Su C. (2010) A Survey on Network Codes for Distributed Storage, *The Proceedings of the IEEE*, 99, 476.
[7] Venkatesan V. (2007) *Distributed storage systems*, IBM Zurich Research Lab, EPFL, Switzerland.

[8] Fragouli C. and Soljanin E. (2007) *Network coding fundamentals*, Now Publishers, Germany
[9] Dougherty R., Freiling C., dan Zeger K. (2005) Insufficiency of Linear Coding in Network Information Flow. *IEEE transactions on information theory*, 51, 8.
[10] Gadouleau M. (2009) Algebraic Codes for Random Linear Network Coding. *P.hD dissertation*, Lehigh University.
[11] Musthofa, Binatari N.. Sifat-sifat Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks atas Aljabar Max Plus, *Jurnal Sains Dasar* , 2, 1.
[12]Wei Guan. (2013) Cooperative Communication Withwireless Network Coding, *Ph.D dissertation*.
[13] Rui A. Costa. (2012) Network Coding for Delay Constrained Wireless Systems with Feedback, *Ph.D Dissertation.*
[14] Kenneth S. J. K. (2000) *Construction Of Binary Linear Codes*. National University of Singapore.
[15] Oliver K., Lang T., and David T. (2009) *Nonlinear Network Coding is Necessary to Combat General Byzantine Attacks*. Forty-Seventh Annual Allerton Conference Allerton House, UIUC, Illinois.