Available online at: http://journal.uny.ac.id/index.php/pythagoras

PYTHAGORAS: Jurnal Pendidikan Matematika, 12 (2), 2017, 109-122

Penerapan Matriks Leslie pada Angka Kelahiran dan Harapan Hidup Wanita di Provinsi Jawa Timur

Dewi Anggreini [1] *, Ratri Candra Hastari [1]

[1] Jurusan Pendidikan Matematika STKIP PGRI Tulungagung. Jalan Mayor Sujadi Timur No.7, Tulungagung, 66221, Indonesia.

* Corresponding Author. E-mail: anggreini_004@yahoo.com

Received: 14 August 2017; Revised: 29 August 2017; Accepted: 25 November 2017

Abstrak

Tujuan penelitian ini adalah menentukan banyaknya populasi wanita di Provinsi Jawa Timur berdasarkan angka kelahiran dan harapan hidup menggunakan nilai eigen dan vektor eigen serta untuk mengetahui distribusi umur pembatas menggunakan model matriks Leslie. Vektor eigen digunakan untuk menentukan banyaknya populasi wanita dari masing-masing interval umur, sedangkan nilai eigen digunakan untuk menentukan laju pertumbuhan penduduk. Metode penelitian yang digunakan pada Tahap pertama adalah menentukan subjek penelitian dan Tahap Kedua adalah (a) mengumpulkan data penelitian (b) analisis data dan terakhir menarik kesimpulan. Data penelitian ini diperoleh dari BPS Provinsi Jawa Timur yaitu jumlah penduduk wanita dari tahun 2010-2015. Hasil penelitian ini adalah model matriks Leslie untuk populasi wanita di Provinsi Jawa Timur adalah model diskrit yang dibagi atas empat belas interval umur yang dikonstruksi menggunakan angka kesuburan dan harapan hidup. Simpulan penelitian menunjukkan bahwa jumlah populasi wanita di Provinsi Jawa Timur cenderung mengalami peningkatan dengan nilai eigen positif yang lebih besar dari satu atau dengan kata lain laju pertumbuhan wanita di Provinsi Jawa Timur cenderung bernilai positif . Keberhasilan model matriks Leslie adalah penerapannya dalam kasus untuk memprediksi jumlah populasi wanita di Provinsi Jawa Timur pada tahun 2021 dengan menggunakan Program MAPLE 16.

Kata Kunci: nilai eigen, vektor eigen, matriks Leslie

Application of the Leslie Matrix on Birth Rate and Life Expectancy of Women in East Java Province

Abstract

This research aimed to determine the number of female population in East Java Province based on birth rate and life expectancy using eigenvalues and eigenvectors and to know the age distribution of limiter using Leslie matrix model. The eigenvectors are used to determine the number of female populations of each age interval, while the eigenvalues are used to determine population growth rates. The research method used in the first phase is to determine the subject of research and Phase Two is (a) collect research data (b) data analysis and last draw conclusions. The data of this study were obtained from BPS of East Java Province, namely the number of female population from 2010-2015. The result of this research is Leslie's matrix model for female population in East Java Province is a discrete model that is divided into fourteen age intervals constructed using fertility and life expectancy. The research conclusion showed that the number of female population in East Java Province tends to increase with positive eigen value which is greater than one or in other words the growth rate of women in East Java Province tends to be positive. The success of Leslie's matrix model is its application in cases to predict the number of female populations in East Java Province by 2021 using the MAPLE 16 Programe.

Keywords: *eigen values, eigen vectors, Leslie matrix*

How to Cite: Anggreini, D., & Hastari, R. (2018). Penerapan matriks Leslie pada angka kelahiran dan harapan hidup wanita di Provinsi Jawa Timur. *Pythagoras: Jurnal Pendidikan Matematika, 12*(2), 109-122. doi:http://dx.doi.org/10.21831/pg.v12i2.15293

***Permalink*/DOI**: http://dx.doi.org/10.21831/pg.v12i2.15293

PENDAHULUAN

Jawa Timur adalah sebuah provinsi di bagian timur pulau Jawa, Indonesia. Dengan Ibu kotanya Surabaya dengan luas wilayahnya 47.922 km². Pertumbuhan populasi wanita merupakan hal penting yang harus diamati, mengingat peran wanita yang salah satunya adalah menentukan perkembangan populasi manusia dimasa depan, Karena tanpa peranan wanita populasi tersebut tidak akan dapat berkembang (Corazon, Nurul, H dan Yusienta, M, 2016, p.1)

Perubahan jumlah pada suatu populasi dipengaruhi oleh keadaan internal dari populasi, yaitu kelahiran, kematian, dan ketahanan hidup. Adanya perubahan jumlah dari suatu populasi disebut pertumbuhan populasi. Pertumbuhan populasi dapat memberikan informasi apakah perubahan jumlah populasi untuk tahun berikutnya selalu meningkat, menurun atau tetap. (Pratama, Prihandono dan Kusumastuti, 2013, p.163).

Proyeksi penduduk bukan merupakan ramalan jumlah penduduk tetapi suatu perhitungan ilmiah yang didasarkan pada asumsi dari komponen-komponen laju pertumbuhan penduduk, yaitu kelahiran, kematian, dan perpindahan. Ketiga komponen inilah yang menentukan besarnya jumlah penduduk dan struktur umur penduduk di masa yang akan datang. Untuk menentukan masing-masing asumsi diperlukan data yang menggambarkan tren di masa lampau hingga saat ini, factor-faktor yang mempengaruhi komponen-komponen itu, dan hubungan antara satu komponen dengan yang lain serta target yang diharapkan tercapai pada masa yang akan datang.

Ilmu pengetahuan banyak berkembang pesat akhir-akhir ini, diantaranya pemodelan matematika. Menurut Iswanto (2012, p.19) dalam perkembangannya model matematika dapat direpresentasikan pada permasalahan yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari. Jadi terdapat hubungan yang kuat antara ilmu terapan dan matematika diwakili oleh model matematika yang dirancang dan diterapkan dengan bantuan ilmu komputer, untuk memudahkan simulasi sistem dunia nyata. Pertumbuhan populasi merupakan salah satu contoh penerapan Aljabar Linear dalam bidang Biologi dan khususnya Ekologi kuantitatif. Dalam Ekologi pertumbuhan populasi sering disebut sebagai "dinamika populasi". Ekologi biasanya didefinisikan sebagai hubungan antara makhluk hidup dengan lingkungannya (Tarumingkeng, 1994, p. 6).

Banyak model yang bisa digunakan untuk menjelaskan pertumbuhan populasi. Salah satu model yang digunakan oleh para ahli kependudukan adalah model Leslie. Dimana model tersebut menggunakan pendekatan Matematika yaitu matriks. Dalam model Leslie proses kelahiran dan kematian itu tergantung oleh umur dan menjadi bagian yang penting dalam pertumbuhan populasi. Pada umumnya pertumbuhan suatu bentuk makhluk hidup merupakan proses yang berlangsung kontinu atau sinambung. Namun demikian, kajian populasi perlu juga didekati dari tinjauan waktu diskrit. Penggunaan pola diskrit didasarkan pula atas pengamatan populasi yang pada umumnya dilakukan selang-selang periode tertentu seperti sehari, seminggu, dan sekian satuan waktu menurut rancangan peneliti yang bersangkutan. Berdasarkan pertimbangan tersebut, penyusunan model-model pertumbuhan selain didasarkan atas solusi-solusi secara kontinu perlu dievaluasi lebih mendalam dengan pemecahan secara diskrit. (Tarumingkeng, 1994, p.27). Selain itu, Belum adanya ukuran yang signifikan untuk mengetahui pertumbuhan populasi wanita di Provinsi Jawa Timur berdasarkan angka kelahiran dan harapan hidup untuk tahun mendatang serta belum diketahui distribusi umur pembatas dengan menggunakan model matriks Leslie.

Terdapat beberapa penelitian tentang Matriks Leslie yaitu penelitian Corazon, Nurul, & Yusienta, (2016, p.6) yang menggunakan matrik Leslie untuk memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan di Provinsi Riau pada tahun 2017. Sehingga diperoleh hasil jumlah populasi perempuan di Provinsi Riau cenderung mengalami peningkatan. Selain itu hasil penelitian yang dilakukan oleh Pratama, Prihandono dan Kusumastuti, (2013, p.23). Penelitiannya menggunakan matrik Leslie untuk mencari nilai eigen yang dominan dengan beberapa factor yang berpengaruh dalam pertumbuhan populasi yaitu kesuburan, ketahanan hidup dan rentan umur populasi.

Dari uraian tersebut sangat perlu untuk menentukan banyaknya populasi wanita dan mengetahui distribusi umur pembatas populasi wanita di Provinsi Jawa Timur berdasarkan angka kelahiran dan harapan hidup menggunakan nilai eigen dan vektor eigen matriks Leslie.

METODE

Penelitian ini adalah penelitian dengan pendekatan kuantitatif dengan jenis penelitian deskriptif. Penelitian ini dilakukan dengan cara mengambil data sekunder di beberapa Badan Pusat Statistik di Provinsi Jawa Timur dengan total populasi sejumlah 38 Kabupaten dan Kota di seluruh Provinsi Jawa Timur. Sampel dalam penelitian ini adalah jumlah penduduk wanita dari tahun 2010 sampai dengan 2015, dengan perbandingan jumlah kelahiran anak dari tahun 2010 sampai tahun 2015. Dari hasil data kemudian diplikasikan dengan menerapkan model matriks Leslie untuk mencari jumlah penduduk, nilai eigen dan vektor eigen.

Prosedur Penelitian

Metode riset yang digunakan pada penelitian ini yaitu: Tahap pertama adalah menentukan subjek penelitian, adapun subjek penelitiannya adalah populasi wanita pada angka kelahiran dan harapan hidup di Provinsi Jawa Timur dan Tahap Kedua adalah (1) mengumpulkan data penelitian, adapun pengumpulan data penelitian didapatkan dari data sekunder di Badan Pusat Statistik Provinsi Jawa Timur. (2) Analisis data dan terakhir adalah menarik kesimpulan.

Peubah yang diamati

Peubah yang diamati dalam penelitian ini adalah nilai eigen dan vektor eigen dari matriks Leslie. Nilai-nilai eigen dari L adalah akar-akar dari polinomial karakteristiknya. Peubah yang diamati dalam penelitian ini adalah nilai eigen dan vektor eigen dari matriks Leslie. Nilai-nilai eigen dari L adalah akar-akar dari polinomial karakteristiknya. Polinomial karakteristik dari matriks Leslie adalah :

$$p(\lambda)= \lambda^{n} - a_1 \lambda^{n-1} - a_2 b_1 \lambda^{n-2} - a_3 b_1 b_2 \lambda^{n-3} \dots - a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

adalah sebuah vektor eigen dari matriks Leslie L yang terkait dengan λ_1 jika dan hanya jika $\mathbf{x}$ adalah solusi non trivial dari $(\lambda I - L)\mathbf{x} = 0$.

Teknik Analisis Data

Dalam melakukan teknik analisis data setelah data selesai diolah yang dilakukan pertama kali adalah mencari nilai *ai* (angka kesuburan populasi wanita) yang diperoleh dari hasil bagi antara jumlah rata-rata angka kelahiran anak yang dilahirkan seorang ibu pada tahun 2010-2015 dibagi dengan jumlah populasi wanita di tahun 2010 dan *bi* (angka harapan hidup populasi wanita) yang diperoleh dari hasil pembagian jumlah penduduk wanita tahun 2015 dengan jumlah penduduk wanita tahun 2010. Kedua, mengkontruksi model matriks Leslie pada pertumbuhan populasi. Ketiga setelah Matrik Leslie terbentuk kemudian memasukan data jumlah populasi wanita di tahun 2015 untuk menghasilkan prediksi jumlah penduduk wanita di tahun 2021. Ketiga, memcari nilai eigen yang positif pada matriks tersebut. Kelima, menentukan vektor eigen dari nilai eigen yang positif. Keenam, menggunakan persamaan pendekatan untuk menentukan distribusi umur pembatas. Ketujuh diketahui banyaknya populasi wanita untuk jangka waktu yang akan datang. Kedelapan menyusun laporan penelitian dan hasil olahan data melalui aplikasi MAPLE 16.

Matriks

Menurut Kariadinata (2013, p.11) Matriks adalah susunan sekelompok bilangan dalam suatu jajaran berbentuk persegi panjang yang diatur berdasarkan baris dan kolom, dan diletakkan diantara dua tanda kurung. Sedangkan menurut Anton & Rorres (2004, p.23) sebuah matriks dengan n baris dan n kolom dinamakan matriks kuadrat berorde n (*square matriks of orde* n), dan entri-entri $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ dikatakan berada pada diagonal utama dari A. Bila A adalah matriks yang mempunyai n baris dan n kolom (bertipe n x n), maka A bisa ditulis sebagai:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Invers Matriks

Menurut Adiwijaya (2014, p.10) misalkan A dan B merupakan matriks bujur sangkar yang berukuran sama dan I adalah matriks identitas. Jika $A.B=I$ maka B dinamakan invers dari matriks A (sebaliknya, A merupakan invers dari matriks B). Notasi bahwa B merupakan matriks invers dari A adalah B= A^{-1} ,sebaliknya A= B^{-1}

Matriks Elementer

Menurut Anton & Rorres (2004, p.56) Suatu matriks n x n dinamakan matriks elementer (*elementary matrix*) jika matriks tersebut dapat diperoleh dari matriks satuan (identitas) I_n n x n dengan melakukan operasi baris elementer tunggal. Setiap matriks elementer dapat dibalik, dan inversnya juga merupakan matriks elementer. Jika A adalah matriks n x n, maka pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen, yakni semuanya benar atau semuanya salah yaitu: (a) A dapat dibalik, (b) $A\ x = 0$ hanya mempunyai solusi trivial, (c) A ekuivalen baris terhadap I_n atau bentuk eselon baris tereduksi dari A adalah I_n.

Determinan

Menurut Anton & Rorres (2004, p.92) suatu hasil kali elementer *(elementary product)* dari suatu matriks A, $n \times n$, adalah hasilkali dari n entri dari A , yang tidak satu pun berasal dari baris atau kolom yang sama.

Nilai eigen dan Vektor eigen

Menurut Kariadinata (2013, p.209) jika A adalah matriks berukuran n x n, maka vektor tak nol $\mathbf{x}$ pada R^n dinamakan vektor eigen (*eigenvector*) dari A jika A $\mathbf{x}$ adalah kelipatan skalar dari $\mathbf{x}$; yakni, $A\ \mathbf{x} = \lambda\ \mathbf{x}$ untuk skalar sebarang λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen (*eigenvalue*) dari A dan $\mathbf{x}$ dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ. Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran n x n maka $A\ \mathbf{x} = \lambda\ \mathbf{x}$ dapat ditulis ulang sebagai $A\ \mathbf{x} = \lambda\ I\ \mathbf{x}$ atau ekuivalen dengan $(\lambda\ I - A)\ \mathbf{x} = 0$. Agar λ menjadi nilai eigen, harus ada solusi tak nol dari persamaan $(\lambda\ I - A)\ \mathbf{x} = 0$, yang diperoleh jika dan hanya jika $\det(\lambda\ I - A) = 0$.

Persamaan $\det(\lambda\ I - A)=0$ disebut persamaan karakteristik (*characteristic equation*) dari A; skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari A. Bila diperluas, maka $\det(\lambda\ I - A)$ adalah polinomial p dalam variabel λ yang dinamakan polinomial karakteristik (*characteristic polynomial*) dari A. Polinomial karakteristik $p(x)$ dari sebuah matriks n x n mempunyai bentuk:

$$p(\lambda) = \det\ (\lambda\ I - A) = \lambda^n + C_1 \lambda^{n-1} + \ldots + C_n$$

Diagonalisasi matriks

Menurut Anton & Rorres (2004, p.74) matriks diagonal suatu matriks bujur sangkar yang entrinya tidak terletak pada diagonal utama adalah nol disebut matriks diagonal (*diagonal matrix*). Suatu matriks diagonal umum D, n x n dapat ditulis

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

Suatu matriks diagonal dapat dibalik, jika dan hanya jika seluruh entrinya pada posisi diagonal utama adalah bilangan taknol; dalam hal ini invers dari D adalah

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix}, \text{ sehingga } D\ D^{-1} = D^{-1} D = I.$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model Matriks Leslie Dalam Pertumbuhan Populasi

Tabel 1. Kelompok Umur Model Matriks Leslie

Kelompok Umur	Interval Umur
1	[0,M/n]
2	[M/n,2M/n]
3	[2M/n,3M/n]
:	:
:	:
(n-1)	[(n-2)2M/n,(n-1)M/n]
n	[(n-1)M/n,M]

Dalam model Leslie, wanita atau betina dibagi atas kelompok umur yang kurun waktunya sama. Secara spesifik, misalkan umur maksimum yang dicapai oleh sebarang wanita atau betina di dalam populasi itu adalah M tahun (atau dinyatakan dalam satuan waktu yang lain) dan kemudian populasi itu dibagi atas n kelompok umur. Maka kurun waktu dalam setiap kelompok *M/n* tahun. Kelompok umur tersebut akan dijelaskan oleh Tabel 1:

Misalnya diketahui banyaknya wanita atau betina dalam setiap kelompok dari ke-*n* kelompok tersebut pada waktu $t = 0$. Khususnya, misalkan, ada $x_1^{(0)}$ wanita atau betina dalam kelompok pertama, $x_2^{(0)}$ wanita atau betina di dalam kelopok kedua, $x_3^{(0)}$ wanita atau betina di dalam kelompok ketiga, dan seterusnya. Dengan bilangan ke-*n* ini akan dibentuk sebuah vektor kolom $\mathbf{x}^{(0)}$ yaitu:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix},$$

Vektor ini dinamakan vektor distribusi umur mula-mula (*initial age distribution vektor*). Dengan berjalannya waktu, banyaknya wanita atau betina di dalam setiap kelompok dari ke-*n* kelompok tersebut akan berubah karena tiga proses biologis, yakni: kelahiran, kematian dan penuaan. Dengan menjelaskan ketiga proses ini secara kuantitatif, akan dapat dilihat bagaimana memproyeksikan vektor distribusi umur mula-mula tersebut ke masa depan. Cara yang paling mudah mempelajari proses penuaan adalah dengan mengamati populasi pada waktu-waktu diskrit, katakanlah $t_0, t_1, \ldots, t_k, \ldots$.

Model Leslie mensyaratkan bahwa kurun waktu diantara dua waktu pengamatan yang berturutan adalah sama seperti kurun waktu dari selang (interval) umur, dan ditulis sebagai berikut: $t_0 = 0$, $t_1 = M/n, t_2 = 2M/n$, sampai $t_k = k\,M/n$. Dengan asumsi ini, maka semua wanita atau betina dalam kelompok ke-$(i+1)$ pada waktu t_{k+1} telah berada dalam kelompok ke-*i* pada waktu t_k.

Parameter Dalam Model Matriks Leslie

Proses kelahiran dan proses kematian diantara dua waktu pengamatan yang berturutan dapat dijelaskan dengan menggunakan parameter demografis seperti pada Tabel 2.

Tabel 2. Parameter dalam Model Matriks Leslie

Parameter Model	Keterangan
a_i $i = 1,2,\ldots,n$	Jumlah rata-rata dari anak perempuan yang dilahirkan oleh seorang wanita selama dia berada dalam kelompok umur ke-*i*.
b_i $i = 1,2,\ldots,n$	Banyaknya wanita dalam kelompok umur ke-*i* yang dapat diharapkan masih hidup dan sampai ke kelompok umur ke-i

Berdasarkan definisinya, maka akan diperoleh bahwa (i) $a_i \geq 0$ untuk $i = 1,2,\ldots,n$ dan (ii) $0 < b_i \leq 1$ untuk $i = 1,2,\ldots,n-1$. Dapat dilihat bahwa, tidak boleh membiarkan adanya b_i yang sama dengan nol, karena jika hal ini terjadi maka tidak akan ada wanita atau betina yang masih hidup sesudah kelompok umur ke-*i*. Dan juga dianggap bahwa sedikit-dikitnya ada satu a_i yang positif sehingga akan terjadi kelahiran. Setiap kelompok umur di mana nilai a_i yang bersangkutan adalah positif dina-makan kelompok umur subur (*fertile age class*).

Selanjutnya akan didefinisikan vektor distribusi umur $\mathbf{x}^{(k)}$ pada waktu t_k dengan

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix},$$

Dimana $x_i^{(k)}$ adalah banyaknya wanita atau betina dalam kelompok umur ke-*i* pada waktu t_k. Pada waktu t_k, wanita-wanita dalam kelompok umur pertama adalah puteri dari wanita-wanita yang lahir diantara waktu t_{k-1} dan waktu t_k. Jadi, dapat dituliskan

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{banyaknya} \\ \text{wanita dalam} \\ \text{kelompok 1} \\ \text{pada waktu } t_k \end{array} \right\} =$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{banyaknya}\\ \text{puteri yang}\\ \text{dilahirkan}\\ \text{oleh wanita}\\ \text{dalam kelompok 1}\\ \text{di antara } t_{k-1}\\ \text{dan waktu } t_k\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l}\text{banyaknya}\\ \text{puteri yang}\\ \text{dilahirkan}\\ \text{oleh wanita}\\ \text{dalam kelompok 2}\\ \text{di antara waktu } t_{k-1}\\ \text{dan waktu } t_k\end{array}\right\}$$

$$+\ldots+\left\{\begin{array}{l}\text{banyaknya}\\ \text{puteri yang}\\ \text{dilahirkan oleh}\\ \text{wanita dalam}\\ \text{kelompok n}\\ \text{di antara waktu}\\ \text{t}_{k-1} \text{ dan waktu t}_{k}\end{array}\right\}$$

Atau secara matematis,

$$x_1^{(k)} = a_1\, x_1^{(k-1)} + a_2\, x_2^{(k-1)} + ..+ a_n\, x_n^{(k-1)} \qquad (1)$$

Banyaknya wanita dalam kelompok umur ke-(i+1) (i = 1, 2, . . . , $n-1$) pada waktu t_k adalah wanita dalam kelompok ke $-\,i$ pada waktu t_{k-1} yang masih hidup pada waktu t_k . Jadi,

$$\left\{\begin{array}{l}\text{banyaknya}\\ \text{wanita dalam}\\ \text{kelompok } i+1\\ \text{pada waktu } t_k\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{jumlah wanita}\\ \text{dalam kelompok } i\\ \text{yang hidup}\\ \text{sampai ke kelompok } i+1\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{bayaknya}\\ \text{wanita dalam}\\ \text{kelompok } i\\ \text{pada waktu } t_{k-1}\end{array}\right\}$$

Atau secara matematis,

$$x_{i+1}^{(k)} = b_i\, x_i^{(k-1)},\ i = 1, 2, \ldots, n-1 \qquad (2)$$

Dengan menggunakan notasi matriks, persamaan (1) dan (2) dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

Atau secara lebih ringkas

$$\mathbf{x}^{(k)} = L\,\mathbf{x}^{(k-1)}, \text{ dengan } k = 1, 2, \ldots \qquad (3)$$

Di mana L adalah matriks Leslie

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Dari persamaan (3) didapatkan bahwa

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= L\,\mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{x}^{(2)} &= L\,\mathbf{x}^{(1)} = L^2\,\mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{x}^{(3)} &= L\,\mathbf{x}^{(2)} = L^3\mathbf{x}^{(0)} \\ &\vdots \\ \mathbf{x}^{(k)} &= L\,\mathbf{x}^{(k-1)} = L^k\mathbf{x}^{(0)} \end{aligned} \qquad (5)$$

Jadi, jika diketahui distribusi umur permulaan $\mathbf{x}^{(0)}$ dan matriks Leslie L, maka dapat ditentukan distribusi umur wanita atau betina pada sebarang waktu kemudian.

Distribusi Umur Pembatas (*Limiting Age Distribution*)

Walaupun persamaan (5) memberikan distribusi umur dari populasi pada sebarang waktu, namun persamaan itu tidak segera memberikan suatu gambaran umum mengenai dinamika dari proses pertumbuhan tersebut. Untuk itu perlu diselidiki nilai-nilai eigen dan vektor-vektor eigen dari matriks Leslie tersebut. Nilai-nilai eigen dari L adalah akar-akar dari polinomial karakteristiknya. Polinomial karakteristik dari matriks Leslie adalah

$$p(\lambda)=$$
$$\lambda^{n} - a_1\,\lambda^{n-1} - a_2\, b_1\lambda^{n-2} - a_3\, b_1\, b_2\lambda^{n-3}$$
$$\ldots - a_n\, b_1\, b_2 \ldots b_{n-1}$$

Akan diberikan teorema-teorema yang berkaitan dengan matriks Leslie, sebagai berikut:

Teorema 1

Sebuah matriks Leslie L mempunyai sebuah nilai eigen positif yang unik λ_1. Nilai eigen ini mempunyai multiplisitas 1 dan mempunyai sebuah vektor eigen $\mathbf{x}_1$ yang semua entrinya adalah positif.

Bukti:

(i) Matriks Leslie L mempunyai sebuah nilai eigen yang positif λ_1.

Nilai eigen adalah akar dari persamaan karakteristiknya, yaitu $p(\lambda) = |\lambda I - L| = 0$

$$p(\lambda) = \lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} - a_2 b_1 \lambda^{n-2} - a_3 b_1 b_2 \lambda^{n-3} \ldots - a_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1}$$

Jika $p(\lambda) = 0$, maka

$$\lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} - a_2 b_1 \lambda^{n-2} - a_3 b_1 b_2 \lambda^{n-3} \ldots - a_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1} = 0 \qquad (6)$$

Karena salah satu akar dari persamaan (6) harus merupakan faktor pembagi dari koefisien $a_n b_1 b_2 .. b_{n-1}$, yaitu ± 1, $\pm a_n$, $\pm b_1$, $\pm b_2$, . . . , $\pm b_{n-1}$

Dimisalkan akan dicari solusi dari salah satu faktor pembagi tersebut, misalnya diambil $b_1 > 0$ sebagai solusi atau b_1 sebagai akarnya, sehingga persamaan (6) menjadi

$$p(\lambda) = \lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} - a_2 b_1 \lambda^{n-2} - a_3 b_1 b_2 \lambda^{n-3} \ldots - a_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1} = 0$$

$$\lambda^n = a_1 \lambda^{n-1} + a_2 b_1 \lambda^{n-2} + a_3 b_1 b_2 \lambda^{n-3} \ldots + a_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1}$$

$$(\lambda - b_1)\left(a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + a_3 b_2 \lambda^{n-3} + \ldots + a_n b_2 .. b_{n-1}\right) = \lambda^n$$

Berarti diperoleh sebuah nilai eigen yang positif λ_1, yaitu $\lambda_1 = b_1$. Kemudian akan dibuktikan bahwa matriks Leslie L mempunyai nilai eigen λ_1 yang tunggal atau $\lambda_1 = b_1$ adalah tunggal. Akan diasumsikan bahwa matriks Leslie tersebut memiliki nilai eigen positif yang lain. Sehingga untuk membuktikannya digunakan cara kontradiksi. Misalnya λ_2 adalah nilai eigen positif yang lain dengan asumsi $\lambda_1 \neq \lambda_2$ atau $\lambda_2 \neq b_1$.

Diket

$$p(\lambda) = \lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} - a_2 b_1 \lambda^{n-2} - a_3 b_1 b_2 \lambda^{n-3} \ldots - a_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1}$$

Jika $p(\lambda) = 0$, maka ,

$$\lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} - a_2 b_1 \lambda^{n-2} - a_3 b_1 b_2 \lambda^{n-3} \ldots - a_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1} = 0$$

Kedua ruas dibagi dengan λ^n, menjadi

$$1 = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2 b_1}{\lambda^2} + \frac{a_3 b_1 b_2}{\lambda^3} + \ldots + \frac{a_n b_1 b_2 .. b_{n-1}}{\lambda^n}$$

Maka $q(\lambda) = 1$, untuk $\lambda \neq 0$ atau $q(\lambda) =$

$$\frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2 b_1}{\lambda^2} + \frac{a_3 b_1 b_2}{\lambda^3} + \ldots + \frac{a_n b_1 b_2 .. b_{n-1}}{\lambda^n} \qquad (7)$$

terbukti bahwa λ_1 dan λ_2 adalah merupakan solusi dari sistem persamaan $q(\lambda) = 1$. Sehingga didapat $q(\lambda_1) = 1$ dan $q(\lambda_2) = 1$ atau $q(\lambda_1) = q(\lambda_2)$. Kemudian dengan menggunakan persaman (7), dan jika $q(\lambda_1) = q(\lambda_2)$

$$\frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2 b_1}{\lambda_1^2} + \frac{a_3 b_1 b_2}{\lambda_1^3} + \ldots + \frac{a_n b_1 b_2 .. b_{n-1}}{\lambda_1^n} = \frac{a_1}{\lambda_2} + \frac{a_2 b_1}{\lambda_2^2} + \frac{a_3 b_1 b_2}{\lambda_2^3} + \ldots + \frac{a_n b_1 b_2 .. b_{n-1}}{\lambda_2^n}$$

Jika $q(\lambda_1)$ dikurangkan dengan $q(\lambda_2)$ maka

$$a_1\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) + a_2 b_1\left(\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2}\right) + a_3 b_1 b_2\left(\frac{1}{\lambda_1^3} - \frac{1}{\lambda_2^3}\right) + \ldots + a_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1}\left(\frac{1}{\lambda_1^n} - \frac{1}{\lambda_2^n}\right) = 0$$

menjadi,

$$a_1\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2}\right) + a_2 b_1\left(\frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}\right) + a_3 b_1 b_2\left(\frac{\lambda_2^3 - \lambda_1^3}{\lambda_1^3 \lambda_2^3}\right) + \ldots + a_n b_1 b_2 .. b_{n-1}\left(\frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_1^n \lambda_2^n}\right) = 0$$

Atau

$$\frac{a_1}{\lambda_1 \lambda_2}(\lambda_2 - \lambda_1) + \frac{a_2 b_1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) + \frac{a_3 b_1 b_2}{\lambda_1^3 \lambda_2^3}(\lambda_2^3 - \lambda_1^3) + .. + \frac{a_n b_1 b_2 .. b_{n-1}}{\lambda_1^n \lambda_2^n}(\lambda_2^n - \lambda_1^n) = 0 \qquad (8)$$

Persamaan (8) akan berlaku jika $\lambda_1 = \lambda_2$, atau terjadi kontradiksi dengan asumsi yang menyatakan $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Sehingga yang benar adalah nilai eigen yang positif dari matriks Leslie adalah tunggal, yaitu $\lambda_1 = \lambda_2 = b_1$.

(ii) Nilai eigen positif λ_1 mempunyai multiplisitas 1

$$\lambda_1 x_4 = b_3 x_3$$

$$x_4 = \frac{b_3}{\lambda_1} x_3 \rightarrow x_4 = \frac{b_3}{\lambda_1}\left(\frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} x_1\right)$$

$$-b_{n-1}x_{n-1} + \lambda_1 x_n = 0$$

$$\lambda_1 x_n = b_{n-1}\, x_{n-1}$$

$$x_n = \frac{b_{n-1}}{\lambda_1} x_{n-1}$$

$$x_n = \frac{b_1 b_2 .. b_{n-1}}{\lambda_1} x_{n-1}$$

Sehingga diperoleh

$$x_2 = \frac{b_1}{\lambda_1} x_1$$

$$x_3 = \frac{b_2}{\lambda_1} x_2 = \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} x_1$$

$$x_4 = \frac{b_3}{\lambda_1} x_3 = \frac{b_1 b_2 b_3}{\lambda_1^3} x_1$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{b_1 b_2 .. b_{n-1}}{\lambda_1} x_{n-1} = \frac{b_1 b_2 .. b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} x_1$$

Jika misal diambil $x_1 = 1$, maka vektor eigen **x** yang bersesuaian dengan λ_1 yaitu

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1/\lambda_1 \\ b_1 b_2/\lambda_1^2 \\ b_1 b_2 b_3/\lambda_1^3 \\ \vdots \\ b_1 b_2 \ldots/\lambda_1^{n-1} \end{bmatrix}$$

Terbukti bahwa vektor eigen matriks Leslie semua elemennya adalah positif.

Teorema 2

Jika λ_1 adalah nilai eigen positif yang unik dari sebuah matriks Leslie L dan jika λ_i adalah sebarang nilai eigen riil atau kompleks dari L, maka $|\lambda_k| \leq \lambda_1$.

Bukti:

Telah dibuktikan bahwa λ_1 adalah nilai eigen positif yang tunggal, maka λ_k adalah nilai eigen yang bisa berupa bilangan riil atau kompleks. Jika misal $\lambda_k = 0$ terbukti bahwa $|\lambda_k| \leq \lambda_1$. Kemudian diambil sebarang $\lambda_k = re^{i\theta}$ dengan $i = \sqrt{-1}$, Untuk membuktikan $|\lambda_k| \leq \lambda_1$ sama dengan memperlihatkan $|r| \leq \lambda_1$. Syarat perlu dan syarat cukup agar λ_k adalah sebuah nilai eigen, λ_k harus merupakan solusi dari sistem persamaan

$$q(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda_k} + \frac{a_2 b_1}{\lambda_k^2} + \ldots + \frac{a_n b_1 b_2 .. b_{n-1}}{\lambda_k^n} = 1,$$

$q(\lambda) = 1$ untuk $\lambda \neq 0$

$$q(\lambda) = \frac{a_1}{re^{i\theta}} + \frac{a_2 b_1}{\left(r^{i\theta}\right)^2} + \ldots + \frac{a_n b_1 b_2 .. b_{n-1}}{\left(r^{i\theta}\right)^n} = 1$$

$$\frac{a_1}{r}\left(e^{i\theta}\right)^{-1} + \frac{a_2 b_1}{r^2}\left(e^{i\theta}\right)^{-2} + \ldots + \frac{a_n b_1 b_2 .. b_{n-1}}{r^n}\left(e^{i\theta}\right)^{-n} = 1$$

$$\frac{a_1}{r}\left(e^{-i\theta}\right) + \frac{a_2 b_1}{r^2}\left(e^{-2i\theta}\right) + \ldots + \frac{a_n b_1 b_2 .. b_{n-1}}{r^n}\left(e^{-ni\theta}\right) = 1$$

$$\frac{a_1}{r}\left(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right) + \frac{a_2 b_1}{r^2}(\cos(-20)$$

$$(\ldots. + i\sin(-2\theta))^{-2}$$

$$+$$

$$\ldots + \frac{a_n b_1 b_2 .. b_{n-1}}{r^n}\left(\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\right) = 1$$

$$\frac{a_1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) + \frac{a_2 b_1}{r^2}(\cos 2\theta - i\sin 2\theta) +$$

$$+ \ldots + \frac{a_n b_1 b_2 .. b_{n-1}}{r^n}(\cos n\theta - i\sin n\theta) = 1$$

Artinya

$$\frac{a_1}{r}(\cos\theta) + \frac{a_2 b_1}{r^2}(\cos 2\theta) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{a_n b_1 b_2 .. b_{n-1}}{r^n}(\cos n\theta) = 1$$

Dan

$$\frac{a_1}{r}(\sin\theta) + \frac{a_2 b_1}{r^2}(\sin 2\theta) + ..$$

$$\ldots + \frac{a_n b_1 b_2 .. b_{n-1}}{r^n}(\sin\theta) = 0$$

Jika diambil bagian yang riil saja yaitu,

$$\frac{a_1}{r}(\cos\theta)+\frac{a_2b_1}{r^2}(\cos 2\theta)+..$$
$$...+\frac{a_nb_1b_2..b_{n-1}}{r^n}(\cos n\theta)=1$$

Karena λ_1 adalah nilai eigen sehingga λ_1 memenuhi persamaan $q(\lambda)=1$ sehingga

$$q(\lambda)=\frac{a_1}{\lambda_1}+\frac{a_2b_1}{\lambda_1^{\,2}}+...+\frac{a_nb_1b_2..b_{n-1}}{\lambda_1^{\,n}}=1$$

Jika

$$\frac{a_1}{r}(\cos\theta)+\frac{a_2b_1}{r^2}(\cos 2\theta)+...$$
$$...+\frac{a_nb_1b_2..b_{n-1}}{r^n}(\cos n\theta)=$$
$$\frac{a_1}{\lambda_1}+\frac{a_2b_1}{\lambda_1^{\,2}}+...+\frac{a_nb_1b_2..b_{n-1}}{\lambda_1^{\,n}}$$

Persamaan ini dikurangkan menjadi

$$a_1\left(\frac{\cos\theta}{r}-\frac{1}{\lambda_1}\right)+a_2b_1\left(\frac{\cos 2\theta}{r^2}-\frac{1}{\lambda_1^{\,2}}\right)+...$$
$$...+a_nb_1b_2...b_{n-1}\left(\frac{\cos n\theta}{r^n}-\frac{1}{\lambda_1^{\,n}}\right)=0$$

$$a_1\left(\frac{\lambda_1\cos\theta-r}{r\lambda_1}\right)+a_2b_1\left(\frac{\lambda_1^{\,2}\cos 2\theta-r^2}{r^2\lambda_1^{\,2}}\right)+... \qquad (9)$$
$$...+a_nb_1b_2...b_{n-1}\left(\frac{\lambda_1^{\,n}\cos n\theta-r^n}{r^n\lambda_1^{\,n}}\right)=0$$

Persamaan (9) berlaku jika $\lambda_1\cos\theta-r=0$. Diperoleh $r=\lambda_1\cos\theta$.

Karena $-1\le\cos\theta\le 1 \rightarrow -\lambda_1\le r\le\lambda_1$, artinya $|r|\le\lambda_1$.

Jika λ_1 memenuhi $|\lambda_k|<\lambda_1$ dikatakan bahwa λ_1 adalah sebuah nilai eigen yang dominan (*dominant eigen value*) dari *L*. Karena itu syarat dari teorema 2 tidak cukup kuat untuk membuktikan bahwa nilai eigen dari matriks Leslie adalah dominan.

Teorema 3

Jika dua entri yang berturutan a_i dan a_{i+1} dalam baris pertama dari sebuah matriks Leslie *L* tidak sama dengan nol maka nilai eigen positif dari *L* adalah dominan.

Disebut nilai eigen yang dominan jika $|\lambda_k|<\lambda_1$ tidak boleh $|\lambda_k|=\lambda_1$ atau ditunjukkan $|\lambda_k|\ne\lambda_1$. Menurut definisi $a_i>0$ dan $a_{i+1}>0$. Dengan $i=1,2,...,n$, tanpa mengurangi keumuman teorema dimisalkan $i=1$. Jadi $a_1>0$ dan $a_2>0$, Sehingga akan ditunjukkan $|\lambda_k|\ne\lambda_1$ dengan $k=2,3,...,n$, dimana λ_1 positif. Untuk membuktikannya dilakukan cara kontradiksi. Yaitu, akan diasumsikan bahwa $\lambda_k=\lambda_1$.

jika $\lambda_k=\lambda_1$ maka $re^{i\theta}=\lambda_1$, sehingga $r(\cos\theta+i\sin\theta)=\lambda_1$

$r\cos\theta+ir\sin\theta=\lambda_1+i0$.

Diperoleh $r\cos\theta=\lambda_1$ dan $r\sin\theta=0$.

Jika persamaan $r\cos\theta=\lambda_1$ dikalikan dengan $\cos\theta$ menjadi $r\cos^2\theta=\lambda_1\cos\theta$.

Artinya $\lambda_1\cos\theta\ne r$ atau $\lambda_1\cos\theta-r\ne 0$ Berdasarkan persamaan (9) yaitu

$$a_1\left(\frac{\lambda_1\cos\theta-r}{r\lambda_1}\right)+a_2b_1\left(\frac{\lambda_1^{\,2}\cos 2\theta-r^2}{r^2\lambda_1^{\,2}}\right)+...$$
$$...+a_nb_1b_2...b_{n-1}\left(\frac{\lambda_1^{\,n}\cos n\theta-r^n}{r^n\lambda_1^{\,n}}\right)=0$$

Diperoleh nilai $a_1=0$ dan $a_2=0$. Pernyataan tersebut bertentangan dengan asumsi yang menyatakan $a_1>0$ dan $a_2>0$. Artinya pengandaian salah sehingga $|\lambda_k|\ne\lambda_1$.

Dalam bagian berikutnya nanti akan selalu dianggap bahwa syarat dari teorema 3 dipenuhi. Akan diasumsikan bahwa *L* dapat didiagonalisasi. Hal ini sebenarnya tidak perlu untuk kesimpulan yang akan di ambil, tapi hal ini akan menyederhanakan argumennya. Dalam kasus ini, *L* mempunyai *n* nilai eigen, λ_1, λ_2, . . . , λ_n, yang tidak perlu berbeda satu sama lain, dan *n* vektor eigen yang bebas linear $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, . . . , $\mathbf{x}_n$, yang bersesuaian dengan nilai eigen itu. Dalam daftar ini akan ditempatkan nilai eigen λ_1 yang dominan terlebih dahulu. Akan dibentuk matriks *P* yang kolom-kolomnya adalah vektor-vektor eigen dari *L*.

$$P=\left[x_1\,|\,x_2\,|\,x_3\,|\cdots|\,x_n\right]$$
$$LP=L\left[\mathbf{x}_1\,|\,\mathbf{x}_2\,|\,\mathbf{x}_3\,|\cdots|\,\mathbf{x}_n\right]$$
$$=\left[L\mathbf{x}_1\,|\,L\mathbf{x}_2\,|\,L\mathbf{x}_3\,|\cdots|\,L\mathbf{x}_n\right]$$
$$=\left[\lambda_1\mathbf{x}_1\,|\,\lambda_2\mathbf{x}_2\,|\,\lambda_3\mathbf{x}_3\,|\cdots|\,\lambda_n\mathbf{x}_n\right]$$

$$= \left[\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3 \mid \cdots \mid \mathbf{x}_n\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = PD.$$

Karena vektor-vektor kolom matriks P bebas linear, dan P dapat dibalik sehingga matriks L dapat didiagonalisasi. Diagonalisasi dari L akan diberikan oleh persamaan

$$L = PDP^{-1}$$

$$L = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}$$

Dari persamaan ini diperoleh

$$L^k = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1}$$

Untuk $k = 1, 2, \ldots.$

Untuk sebarang vektor distribusi umur mula-mula $\mathbf{x}^{(0)}$ maka akan diperoleh

$$L^k\, \mathbf{x}^{(0)} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1}\, \mathbf{x}^{(0)}$$

untuk $k = 1, 2, \ldots.$

Dengan membagi kedua ruas persamaan ini dengan λ_1^k dan dengan menggunakan kenyataan bahwa $\mathbf{x}^{(\mathrm{k})} = L^{(k)}\mathbf{x}^{(0)}$, maka akan diperoleh

$$\frac{1}{\lambda_1^k}\mathbf{x}^{(k)} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \end{bmatrix} P^{-1}\, \mathbf{x}^{(0)} \qquad (10)$$

Karena λ_1 adalah nilai eigen yang dominan yaitu $|\lambda_1| > |\lambda_i|$, maka $|\lambda_i / \lambda_1| < 1$ untuk $i = 2, 3, \ldots., n$. Jelaslah bahwa $(\lambda_i / \lambda_1)^k \to 0$

jika $k \to \infty$ untuk $i = 2, 3, \ldots., n$

Dengan menggunakan kenyataan ini, dapat mengambil limit dari kedua ruas dari (10) untuk mendapatkan

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{\lambda_1^k}\mathbf{x}^{(k)}\right\} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} P^{-1}\mathbf{x}^{(0)} \qquad (11)$$

Kemudian akan dinyatakan entri pertama dari vektor kolom $P^{-1}\mathbf{x}^{(0)}$ dengan konstanta c, maka

$$P^{-1}\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} c \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Hasil ini dimasukkan ke persamaan (11)

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{\lambda_1^k}\mathbf{x}^{(k)}\right\} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2 | \mathbf{x}_3 | \cdots | \mathbf{x}_n\right] \mathrm{a}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} =$$

$$\left[\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2 | \mathbf{x}_3 | \cdots | \mathbf{x}_n\right] \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = c\,\mathbf{x}_1$$

Sehingga ruas kanan dari (11) dapat ditulis sebagai $c\,\mathbf{x}_1$, di mana c adalah kontanta yang positif yang hanya bergantung pada vektor distribusi umur mula-mula $\mathbf{x}^{(0)}$. Jadi (11) menjadi

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{\lambda_1^k}\mathbf{x}^{(k)}\right\} = c\,\mathbf{x}_1 \qquad (12)$$

Persamaan (12) memberikan aproksimasi

$$\mathbf{x}^{(k)} \simeq c\lambda_1^k\,\mathbf{x}_1 \qquad (13)$$

Untuk nilai-nilai k yang besar. Dari (13) juga memperoleh

$$\mathbf{x}^{(k-1)} \simeq c\lambda_1^{k-1}\,\mathbf{x}_1 \qquad (14)$$

Dengan membandingkan persamaan (13) dan persamaan (14) diperoleh

$$\mathbf{x}^{(k)} \simeq \lambda_1 \, \mathbf{x}^{(k\text{-}1)} \qquad (15)$$

Untuk nilai-nilai k yang besar. Hal ini berarti bahwa untuk nilai-nilai waktu yang besar setiap vektor distribusi umur adalah kelipatan skalar dari vektor distribusi umur sebelumnya, dan skalar tersebut adalah nilai eigen positif dari matriks Leslie. Sebagai konsekuensinya, banyaknya proporsi betina di dalam setiap kelompok dari kelompok-kelompok umur tersebut akan menjadi konstan.

Kemudian akan ditinjau lagi persamaan (13) yang memberikan vektor distribusi umur dari populasi tersebut untuk waktu yang lama:

$$\mathbf{x}^{(k)} \simeq c\lambda_1^k \, \mathbf{x}_1 \qquad (16)$$

Tiga kasus akan muncul sesuai dengan nilai eigen λ_1:
(i) Jumlah populasi pada akhirnya akan cenderung bertambah/meningkat jika λ_1>1, (ii) Jumlah populasi pada akhirnya akan cenderung berkurang/menurun jika λ_1<1, (iii) Populasi akan cenderung stabil/tetap jika λ_1= 1. Apabila jumlah populasi cenderung menurun maka dapat dikatakan juga bahwa laju pertumbuhan populasi bernilai negatif, sedangkan apabila jumlah populasi meningkat dapat dikatakan juga bahwa laju pertumbuhan populasi bernilai positif.

Data Jumlah Penduduk Wanita dan Jumlah Anak yang Lahir Tahun 2010 dan Tahun 2015 di Provinsi Jawa Timur

Berikut ini data jumlah penduduk wanita mulai tahun 2010-2015 di provinsi Jawa Timur yang telah diteliti dalam penelitian. Karena hanya sedikit saja wanita yang berumur diatas 45 tahun yang melahirkan anak, maka akan dibatasi dari populasi wanita yang berumur diantara 15 dan 44 tahun hal ini dikarenakan interval umur kesuburan wanita yaitu 15 - 44 tahun. Data ini adalah untuk kelompok umur yang kurun waktunya 5 tahun, sehingga jumlah seluruhnya ada 14 kelompok umur.

Dari data Tabel.3 akan dilakukan analisis data dengan mencari parameter a_i (angka kesuburan) dan parameter b_i (angka harapan hidup). Model Matriks Leslie dapat digunakan untuk mengetahui jumlah populasi wanita 6 tahun berikutnya. Dengan menggunakan matriks Leslie, berdasarkan Tabel 4. populasi wanita dibagi atas beberapa interval kelas umur, dengan interval umur kesuburan wanita yaitu 15-44 tahun. Untuk menghitung jumlah populasi wanita dengan metode matriks Leslie dipengaruhi oleh angka kesuburan (a_i) dan harapan hidup (b_i). Berikut merupakan langkah penyelesaian untuk memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan Provinsi Jawa Timur pada tahun 2021.

Tabel 3. Jumlah Penduduk Wanita dan Anak Yang Lahir Tahun 2010-2015.

Kelas Umur	Jumlah Wanita Tahun 2010	Jumlah Anak yang Lahir	Jumlah Wanita Tahun 2015
0-4	1,492,849	0	1,436,212
5-9	1,494,547	0	1,479,468
10-14	1,524,549	0	1,490,163
15-19	1,500,847	1,347,932	1,516,423
20-24	1,468,408	782,601	1,484,485
25-29	1,524,462	388,855	1,447,582
30-34	1,549,572	185,880	1,504,960
35-39	1,534,539	127,216	1,530,977
40-44	1,490,910	106,949	1,513,488
45-49	1,347,892	0	1,463,304
50-54	1,107,463	0	1,312,158
55-59	840,334	0	1,065,029
60-64	658,064	0	791,423
65+	1,518,517	0	1,639,278
Total	**19,052,953**	**2,939,433**	**19,674,950**

Selanjutkan akan dilakukan analisis menggunakan program MAPLE 16 untuk mengetahui dinamika proses pertumbuhan tersebut berdasarkan nilai eigen dan vektor eigen matriks Leslie. Kemudian dengan menggunakan persamaan pendekatan untuk distribusi umur pembatas $\mathbf{x}^{(k)} \simeq \lambda_1 \, \mathbf{x}^{(k\text{-}1)}$ akan dicari laju pertumbuhan penduduk wanita di Provinsi Jawa Timur.

Tabel 4. Angka Kesuburan dan Harapan Hidup Populasi Wanita

Kelas Umur	a_i	b_i
0-4	0	0.9910
5-9	0	0.9971
10-14	0	0.9947
15-19	0.8981	0.9891
20-24	0.5330	0.9858
25-29	0.2551	0.9872
30-34	0.1200	0.9880
35-39	0.0829	0.9863
40-44	0.0717	0.9815
45-49	0	0.9735
50-54	0	0.9617
55-59	0	0.9418
60-64	0	2.4911
65 +	0	-

$$L=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0.8981 & 0.5330 & 0.2551 & 0.1200 & 0.0829 & 0.0717 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0.9910 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0.9971 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0.9947 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0.9891 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.9858 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9872 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9880 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9863 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9815 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9735 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9617 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9418 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.4911 & 0
\end{bmatrix}$$

Gambar 1. Matriks Leslie

Setelah dibentuk matriks Leslie, berdasar-kan persamaan (3) yaitu $\mathbf{x}^{(k)} = L\,\mathbf{x}^{(k-1)}$, dengan $k = 1, 2, \ldots$ untuk memprediksi jumlah wanita pada tahun 2021. Berdasarkan Tabel 4 diperoleh matriks Leslie sebagai berikut: $\mathbf{x}^{(k)} = L\,\mathbf{x}^{(k-1)} =$

$$=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0.8981 & 0.5330 & 0.2551 & 0.1200 & 0.0829 & 0.0717 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0.9910 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0.9971 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0.9947 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0.9891 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.9858 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9872 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9880 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9863 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9815 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9735 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9617 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9418 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.4911 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
1.436212\\ 1.479468\\ 1.490163\\ 1.516423\\ 1.484485\\ 1.447582\\ 1.504960\\ 1.530977\\ 1.513488\\ 1.463304\\ 1.312158\\ 1.065029\\ 791.423\\ 1.639278
\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}
1.426901\\ 1.423286\\ 1.475178\\ 1.482265\\ 1.499894\\ 1.463405\\ 1.429053\\ 1.486900\\ 1.510003\\ 1.485488\\ 1.424526\\ 1.261902\\ 1.003044\\ 1.971514
\end{bmatrix}$$

Gambar 2. Perkalian Matriks Leslie dengan Jumlah Wanita Tahun 2015

Dengan menggunakan program MAPLE 16 nilai eigen yang positif dan vektor eigennya dapat diaproksimasikan dengan Tabel 5.

$$\lambda_1 = 1{,}295057 \text{ dan } \begin{bmatrix} x_1^{(k)}\\ x_2^{(k)}\\ x_3^{(k)}\\ \vdots\\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\\ 0.765217\\ 0.589161\\ 0.452519\\ 0.345612\\ 0.263080\\ 0.200541\\ 0.152993\\ 0.116518\\ 0.088307\\ 0.066380\\ 0.049294\\ 0.035848\\ 0.049647 \end{bmatrix}$$

Kemudian dengan menggunakan per-samaan pendekatan untuk distribusi umur pembatas: $\mathbf{x}^{(k)} \simeq \lambda_1\,\mathbf{x}^{(k\text{-}1)}$ sehingga $\mathbf{x}^{(k)} \simeq 1{,}295057\,\mathbf{x}^{(k\text{-}1)}$. Dari nilai eigen yang diperoleh $\lambda_1 > 1$ sehingga tiap-tiap lima tahun populasi wanita di Provinsi Jawa Timur tersebut akan cenderung mengalami peningkatan atau dengan kata lain laju pertumbuhan populasi wanita di Provinsi Jawa Timur cenderung bernilai positif.

Berdasarkan Tabel 4. Dari hasil vektor eigen dapat dilihat didalam limitnya untuk tiap tiap 1 juta penduduk wanita akan ada 77% wanita yang berumur 5-9 tahun, akan ada 59% wanita yang berumur 10-14, akan ada 45% wanita yang berumur 15-19, dan seterusnya.

Tabel 5. Hasil Vektor Eigen dengan MAPLE 16

Hasil Vektor Eigen	Prosentase	Kelas Umur
1	100%	0-4
0.77	77%	5-9
0.59	59%	10-14
0.45	45%	15-19
0.35	35%	20-24
0.26	26%	25-29
0.2	20%	30-34
0.15	15%	35-39
0.12	12%	40-44
0.09	9%	45-49
0.07	7%	50-54
0.05	5%	55-59
0.04	4%	60-64
0.05	5%	65+

Tabel 6. Jumlah Wanita Pada Tahun 2010 dan Tahun 2015 & Prediksi Wanita Tahun 2021

Jumlah Wanita 2010	Jumlah Wanita 2015	Prediksi Jumlah Wanita 2021
1.493.849	1,436,212	1,426,901
1,494,547	1,479,468	1,423,286
1,524,549	1,490,163	1,475,178
1,500,847	1,516,423	1,482,265
1,468,408	1,484,485	1,499,894
1,524,462	1,447,582	1,463,405
1,549,572	1,504,960	1,429,053
1,534,539	1,530,977	1,486,900
1,490,910	1,513,488	1,510,003
1,347,892	1,463,304	1,485,488
1,107,463	1,312,158	1,424,526
840,334	1,065,029	1,261,902
658,064	791,423	1,003,044
1,518,517	1,639,278	1,971,514
19,052,953	**19,674,950**	**20,343,361**

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

Berdasarkan hasil analisis data tentang Matriks Leslie pada populasi wanita di Provinsi Jawa Timur, maka dapat diambil kesimpulan yaitu nilai eigen untuk jumlah populasi penduduk wanita di Provinsi Jawa Timur di tahun 2021 sebesar 20.343.361, sedangkan dari vector eigen dapat dilihat bahwa didalam limitnya, untuk tiap-tiap satu juta wanita yang berumur diantara 5-9 tahun aka nada 77% wanita yang berumur diantara 5-9, akan ada 59% wanita yang berumur diantara 10-14, aka nada 45% wanita yang berumur diantara 15-19, dan seterusnya, Distribusi umur pembatas untuk populasi wanita di Provinsi Jawa Timur adalah $x^{(k)} \simeq \lambda_1 x^{(k-1)}$ dengan nilai eigen positif λ_1 yang lebih besar dari satu yaitu sebesar 1,295057 sehingga jumlah populasi wanita di Provinsi Jawa Timur pada tahun 2021 cenderung mengalami peningkatan atau dapat dikatakan laju pertumbuhan populasi cenderung bernilai positif.

Saran

Pada proses pengumpulan data, terdapat kendala yaitu tidak diperoleh data-data seperti halnya data angka kematian wanita dan kematian penduduk dikarenakan untuk setiap Dinas Catatan Sipil dan Kependudukan maupun Dinas Kesehatan tidak melaporkan data-data angka kematian di setiap kabupaten. Sehingga perlu dilakukan pendataan terkait data angka kematian oleh Dinas Catatan Sipil dan BPS ketika melakukan sensus penduduk. Matriks Leslie selain memiliki manfaat dalam pertumbuhan populasi wanita juga bisa dikembangkan oleh peneliti lain untuk memperkirakan banyaknya penduduk atau populasi hewan tertentu di suatu negara. Sehingga karena objek penelitiannya yang luas, dapat diketahui lebih banyak mengenai manfaat metode matrik.

DAFTAR PUSTAKA

Adiwijaya. (2014). *Aplikasi matriks dan ruang vektor*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Anton, H. & Rorres, C. (1988). *Penerapan aljabar linear*. Jakarta: Erlangga.

Anton, H., & Rorres, C (2004). *Aljabar linear elementer (versi aplikasi)*. Jakarta: Erlangga.

Badan Pusat Statistik. (2013). Proyeksi penduduk Indonesia (Indonesian population projection) 2010-2035, Jakarta.

Corazon, N. H & Yusianta, M. (2016). Aplikasi matriks Leslie untuk memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan perempuan di Provinsi Riau pada tahun 2017. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika (JSMS)*, 2 (3), 1-11 ejournal.uin-suska.ac.id/index.php/JSMS/article/download/3098/

Iswanto, R.J. (2012). *Pemodelan matematika aplikasi dan terapannya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Kariadinata, R. (2013). *Aljabar matriks elementer*. Bandung: CV Pustaka Setia.

Pratama, Prihandono, & Kusumastuti (2013). Aplikasi matriks Leslie untuk memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan suatu populasi. *Bimaster: Buletin Ilmiah Math. Stat. Dan*

Terapannya, 2(3), 163-172. http://jurnal.untan.ac.id/index.php/jbmstr/article/view/3859.

Tarumingkeng, R.C. (1994), *Dinamika Populasi (Kajian ekologi kuantitatif)*, Pustaka Sinar Harapan, Jakarta.