PYTHAGORAS Vol. 7, No. 1, Juni 2012

# EVALUASI DISTRIBUSI GABUNGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA KONVOLUSI DAN REKURSI PANJER

Rosita Kusumawati

Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta (UNY)
Karangmalang, Yogyakarta 55281, Indonesia
rosita.kusumawati@gmail.com

Abstrak

Evaluasi distribusi gabungan merupakan bagian penting dalam matematika asuransi dan manajemen resiko. Perbandingan evaluasi distribusi gabungan menggunakan algoritma Konvolusi dan rekursi Panjer akan dikaji dalam tulisan ini.
Keywords: distribusi gabungan, konvolusi, rekursi panjer

Abstact

Evaluation of the compound distribution is an important part in the field of mathematics insurance and risk manajement. Comparative evaluation of the compound using Convolution algorithms and Panjer recursion will be reviewed in this paper.
Keyword: compound distribution, convolution, panjer recursion

## PENDAHULUAN

Salah satu pilar dalam teori resiko klasik dan asuransi adalah analisa kumpulan resiko atau jumlahan klaim dari seluruh polis-polis dalam suatu portofolio asuransi. Ada dua cara untuk melakukan analisa akumulasi klaim (Kulgman, et al. 2004), yaitu dengan model resiko individu (individual risk model) dan model resiko kolektif (collective risk model). Individual risk model melihat polis secara individual, sedangkan collective risk model melihat jumlahan klaim secara menyeluruh dalam portofolio bukan polis secara invidual. Akumulasi klaim asuransi kebakaran dan kerugian adalah salah satu contoh asuransi yang cocok dimodelkan menggunakan *collective risk model*.

*Collective risk model* merupakan proses acak. Misalkan peubah acak $N$ menyatakan jumlah klaim yang terjadi dari suatu portofolio polis dalam suatu rentang waktu tertentu, dan peubah acak $X_i$ adalah besar klaim ke–$i$, untuk $i$ = 1,2, …, $N$. Total klaim dari portofolio dalam periode tersebut adalah, $S = X_1 + X_2 + ... + X_N$. Asumsi yang digunakan untuk mempermudah dalam mempelajari model resiko kumpulan $S$ di atas yaitu,

i. $X_1, X_2, \dots$ iid
ii. peubah acak $N$, $X_1$, $X_2$, … saling independen

Evaluasi distribusi gabungan sangatlah penting dalam c*ollective risk model*. Ada beberapa pendekatan yang dapat dilakukan yaitu algoritma Konvolusi, algoritma Rekursi untuk kelas distribusi yang lebih besar dalam, Fast Fourier Transform (FFT), *sparse vector,* dan lain – lain. Dalam tulisan ini penulis akan mengkaji algoritma Konvolusi dan Rekursi Panjer dalam evaluasi distribusi gabungan.

## FUNGSI DISTRIBUSI GABUNGAN

Fungsi distribusi gabungan *S* dari total jumlah klaim dari seluruh polis dalam portofolio adalah fungsi yang dapat digunakan untuk melakukan analisa kumpulan resiko yang imple-mentasinya pada asuransi kebakaran digunakan untuk menghitung premi reasuransi stop loss. Sifat-sifat dis-tribusi gabungan akan dibahas dalam beberapa teorema di bawah ini.

**Teorema 1**. (Bowers, et. al., 1997) *Diberikan variabel random total klaim S yaitu* $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$, *dengan variabel random N jumlah klaim dan* $X_i$ *iid.*

a. $E(S) = E(X)E(N)$.

b. $Var(S) = E(N)Var(X) + (E(X))^2 Var(N)$.

c. $m_S(t) = m_N(\log m_X(t))$.

bukti:

a. $E(S) = E(E(S|N))$.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(X_1 + \ldots + X_N | N = n) P(N = n)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(X_1 + \ldots + X_n | N = n) P(N = n)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(X_1 + \ldots + X_n) P(N = n)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} nE(X) P(N = n)$$
$$= E(X)E(N)$$

.

b. Dengan menggunakan dekomposisi variansi diperoleh,

$$Var(S) = E(Var(S|N)) + Var(E(S|N))$$

.

$$= E(NVar(X)) + Var(N\mu)$$
$$= E(N)Var(X) + (E(X))^2 Var(N)$$

.

c. $m_S(t) = E(E(e^{tS}|N))$.

.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(e^{t(X_1+\ldots+X_N)} | N = n\right) P(N = n)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(e^{t(X_1+\ldots+X_n)}\right) P(N = n)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (m_X(t))^n P(N = n)$$
$$= E\left(\left(e^{\log m_X(t)}\right)^N\right)$$

.

$$= m_N\left(\log m_X\left(t\right)\right).$$

■

Pemilihan distribusi dari $N$ akan berpengaruh pada distribusi dari $S$. Terdapat beberapa bentuk khusus yang sering digunankan dalam analisa model resiko, yaitu untuk $N$ berdistribusi Poisson, maka $S$ berdistribusi gabungan Poisson, dan untuk $N$ berdistribusi binomial negatif, $S$ berdistribusi gabungan binomial negatif.

**Teorema 2**. (Bowers, et. al., 1997) *Untuk* $N \sim POI\left(\lambda\right)$, $S$ *disebut distribusi gabungan Poisson dengan* $E\left(S\right)=\lambda E\left(X\right)$, $Var\left(S\right)=\lambda E\left(X^2\right)$ *dan* $m_S\left(t\right)=\exp\lambda\left(m_X\left(t\right)-1\right)$.

bukti :
cukup jelas menggunakan Teorema 1.

■

**Teorema 3**. *Untuk* $N \sim BIN\left(r,p\right)$, $S$ *disebut distribusi gabungan Binomial Negatif dengan* $E\left(S\right)=\frac{rq}{p}E\left(X\right)$,

$$Var\left(S\right)=\frac{rq}{p^2}E\left(X^2\right)-\frac{rq^2}{p^2}\left(E\left(X\right)\right)^2 \text{ dan}$$

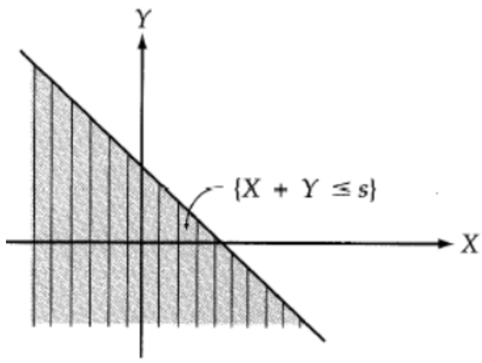
$$m_S\left(t\right)=\left(\frac{p}{1-qm_X\left(t\right)}\right)^r.$$

bukti :
cukup jelas menggunakan Teorema 1.

■

## ALGORITMA KONVOLUSI

Misalkan dua peubah acak $X_1$, $X_2$, yang saling independen dan $S=X_1+X_2$ dengan daerah diberikan pada gambar di bawah ini.




Gambar 1. Daerah $X_1+X_2\le s$

Fungsi distribusi dari $S$ adalah $F_S\left(s\right)=P\left(S\le s\right)=P\left(X_1+X_2\le s\right)$.

Jika adalah peubah acak diskrit maka dengan hukum peluang total dapat diperoleh,

$$F_S(s)=\sum_{\forall r\le s}P\left(X_1+X_2\le s \middle| X_2=r\right)P\left(X_2=r\right)$$

$$=\sum_{\forall r\le s}P\left(X_1\le s-r \middle| X_2=r\right)P\left(X_2=r\right)$$

Diketahui $X_1$, $X_2$ independen, sehingga diperoleh,

$$F_S(s)=\sum_{\forall r\leq s}F_{X_1}(s-r)\,f_{X_2}(r) \qquad (1)$$

Hal yang sama juga diperoleh untuk peubah acak kontinu. Proses pada persamaan (1) disebut konvolusi dari sepasangan fungsi distribusi $F_{X_1}(x_1)$ dan $F_{X_2}(x_2)$, yang dapat dinotasikan dengan $F_{X_1} * F_{X_2}$. Algoritma Konvolusi untuk distribusi gabungan secara umum diberikan dalam teorema di bawah ini.

**Teorema 1**. Konvolusi (Kass R., 2008)
*Distribusi bersyarat S untuk N = n adalah*

$$F_S(s)=P(S\leq s)=\sum_{n=0}^{\infty}P\left(X_1+...+X_N\leq s\,\middle|\,N=n\right)P(N=n),$$

*atau dapat dituliskan dalam bentuk lain*

$$F_S(s)=\sum_{n=0}^{\infty}P^{*n}(s)P(N=n), \qquad \textit{dan}$$

$$f_S(s)=\sum_{n=0}^{\infty}p^{*n}(s)P(N=n).$$

bukti :
cukup jelas menggunakan hukum peluang total.

■

**Contoh 2**. Diketahui jumlah klaim N berdistribusi Poisson dengan $\lambda=2$. Diasumsikan $S=\sum_{i=1}^{N}X_i$, dan $P(X=1)=\frac{1}{2}$, serta $P(X=2)=P(X=3)=\frac{1}{4}$. Tentukan distibusi dari S.

Untuk jumlah klaim N berdistribusi Poisson dengan $\lambda=2$, $P(N=n)=f_N(n)=\frac{e^{-2}2^n}{n!}$. Distribusi *S* akan ditentukan menggunakan algoritma Konvolusi. Dari Teorema 4, diperoleh tabel konvolusi sebagai berikut,

| N | 0 | 1 | 2 | 3 | … | $f_S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p^{*n}(x)P(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(N=n)$ | $e^{-2}$ | $2e^{-2}$ | $2e^{-2}$ | $\frac{4}{3}e^{-2}$ | | |
| $x$ | $p^{*0}(x)$ | $p^{*1}(x)$ | $p^{*2}(x)$ | $p^{*3}(x)$ | | |
| 0 | 1 | | | | | $e^{-2}$ |
| 1 | | $\frac{1}{2}$ | | | | $\frac{1}{2}.2e^{-2}=e^{-2}$ |
| 2 | | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ | | | $\frac{1}{4}.2e^{-2}+\frac{1}{4}.2e^{-2}=e^{-2}$ |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}.\frac{1}{4}+\frac{1}{4}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}.\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ | | $\frac{1}{4}.2e^{-2}+\frac{1}{4}.2e^{-2}+\frac{1}{8}.\frac{4}{3}e^{-2}=\frac{7}{6}e^{-2}$ |
| 4 | | | $\frac{1}{2}.\frac{1}{4}+\frac{1}{4}.\frac{1}{4}+\frac{1}{4}.\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$ | .. | | … |
| 5 | | | $\frac{1}{4}.\frac{1}{4}+\frac{1}{4}.\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ | … | | … |
| 6 | | | $\frac{1}{4}.\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$ | … | | … |
| … | | … | … | … | … | … |

**Tabel 1**. Konvolusi Distribusi Gabungan Poisson $\lambda = 2$

Terlihat bahwa evaluasi distribusi gabungan menggunakan algoritma Konvolusi sangat rumit dan membutuhkan perhitungan yang sangat banyak terutama ketika n semakin besar. Algoritma rekursi adalah salah satu pendekatan lain untuk distribusi gabungan.

## ALGORITMA REKURSI PANJER

Algoritma berikutnya yang dapat digunakan untuk mengevaluasi distribusi gabungan adalah Algoritma rekursi Panjer. Relasi yang mendasari rekursi Panjer diberikan dalam Teorem 5 di bawah ini. Pada beberapa literatur banyak dijumpai algoritma rekursi lain yang menggunakan relasi yang sama relasi berikut.

**Teorema 5**. (Kass R., 2008)

*Distribusi gabungan S dengan N adalah jumlah klaim yang terjadi dengan* $\frac{P(N=n)}{P(N=n-1)}=\left(a+\frac{b}{n}\right)$ *atau dapat ditulis dalam notasi lain* $q_n = q_{n-1}\left(a+\frac{b}{n}\right)$, *untuk n = 1, 2,.., dan* $X_i$ *adalah besar klaim ke – i dengan* $x>0, \forall x \in X_i$ *adalah*

$$f(0)=\begin{cases}\Pr\left[N=0\right] & ,\ jika\ p(0)=0\\ m_N\left(\log p(0)\right) & ,\ jika\ p(0)>0\end{cases}.$$

$$f(s)=\frac{1}{1-ap(0)}\sum_{h=1}^{s}\left(a+\frac{bh}{s}\right)p(h)f(s-h),\quad s=1,2,...$$

. (3.1)

bukti:

Untuk s = 0, dengan menggunakan

$$f_S(s)=P(S=s)=\sum_{n=0}^{\infty}P\left(X_1+...+X_N=s\middle|N=n\right)P(N=n)$$ (Teorema 4.),

diperoleh bahwa $p(0)=0$ maka $f(0)=\Pr[N=0]$, dan untuk *jika* $p(0)>0$ maka $f(0)=m_N(\log p(0))$.

Untuk s = 1, 2,…, dibentuk $T_k = X_1 + X_2 + ... + X_k$. Ada $k$ iid variabel, dengan $X_1$ dan $k-1$ variabel yang lain iid dan simetris, jelas

$$E\left(a+\frac{bX_1}{s}\middle|T_k=s\right)=a+\frac{b}{s}\left(\frac{s}{k}\right)=a+\frac{b}{k} \text{ (i)}$$

Harga harapan tersebut dapat pula dinyatakan dalam bentuk,

$$E\left(a+\frac{bX_1}{s}\middle|T_k=s\right)=\sum_{h=0}^{s}a+\frac{bh}{s}P\left(X_1=h\middle|T_k=s\right)=\sum_{h=0}^{s}\left(a+\frac{bh}{s}\right)\frac{P(X_1=h)P(T_k-X_1=s-h)}{P(T_k=s)}$$

(ii)

Dari (i), (ii) dan relasi $q_n = q_{n-1}\left(a+\frac{b}{n}\right)$, diperoleh Distribusi gabungan S yaitu

$$\begin{aligned}
f(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k P(T_k=s)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(a+\frac{b}{k}\right)q_{k-1}P(T_k=s)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(E\left(a+\frac{bX_1}{s}\middle|T_k=s\right)\right)q_{k-1}P(T_k=s)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}q_{k-1}\sum_{h=0}^{s}\left(a+\frac{bh}{s}\right)\frac{P(X_1=h)P(T_k-X_1=s-h)}{P(T_k=s)}P(T_k=s)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}q_{k-1}\sum_{h=0}^{s}\left(a+\frac{bh}{s}\right)P(X_1=h)P(T_k-X_1=s-h)\\
&= \sum_{h=0}^{s}\left(a+\frac{bh}{s}\right)P(X_1=h)\sum_{k=1}^{\infty}q_{k-1}P(T_k-X_1=s-h)\\
&= \sum_{h=0}^{s}\left(a+\frac{bh}{s}\right)p(h)f(s-h)\\
&= ap(0)f(s)+\sum_{h=1}^{s}\left(a+\frac{bh}{s}\right)p(h)f(s-h).
\end{aligned}$$

diperoleh,

$$f(s)=\frac{1}{1-ap(0)}\sum_{h=1}^{s}\left(a+\frac{bh}{s}\right)p(h)f(s-h). \qquad \blacksquare$$

Algoritma rekursi Panjer hanya dapat digunakan untuk distibusi yang memenuhi relasi Teorema 5., dan distribusi–distribusi itu adalah distribusi Poisson, Binomial Negatif, dan Binomial. Berikut formula rekursi untuk distribusi gabungan Poisson, Binomial Negatif, dan Binomial,

i. Distribusi Poisson $(\theta)$ memenuhi $q_n = q_{n-1}\left(a + \frac{b}{n}\right)$, dengan dengan $a = 0$ dan $b = \theta > 0$. Persamaan 3.1 untuk distribusi Poisson $(\theta)$ adalah,

$$f(0) = \begin{cases} \Pr[N=0] = \dfrac{e^{-\theta}\theta^0}{0!} = e^{-\theta}, & jika\ p(0) = 0 \\ m_N(\log p(0)) = \exp(\theta(p(0)-1)) = e^{-\theta(1-p(0))}, & jika\ p(0) > 0 \end{cases}$$

$$f(s) = \frac{1}{s}\sum_{h=1}^{s}\theta h p(h)\, f(s-h), \quad s = 1, 2, \ldots$$

.

**Contoh 2**. Tentukan distibusi dari S pada Contoh 1. dengan algoritma Rekursi Panjer.

Diketahui distribusi gabungan Poisson dengan dengan $\lambda = 2$ dan $P[X = 1,2,3] = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$. Dengan Teorema 5. diperoleh,

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{s}\left(2.1.p(1)\, f(s-1) + 2.2\, p(2)\, f(s-2) + 2.3.p(3)\, f(s-3)\right) \\ &= \frac{1}{s}\left(2.1.\frac{1}{2}.f(s-1) + 4.\frac{1}{4}.f(s-2) + 6.\frac{1}{4}.f(s-3)\right) \\ &= \frac{1}{s}\left(f(s-1) + f(s-2) + \frac{3}{2}.f(s-3)\right) \end{aligned}$$

untuk s = 1,2,…. Diperoleh,

$f_S(0) = e^{-2}$,

$f_S(1) = \frac{1}{1} f_S(0) = e^{-2}$,

$f_S(2) = \frac{1}{2}\left(f_S(1) + f_S(0)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-2} + e^{-2}\right) = e^{-2}$,

$f_S(3) = \frac{1}{3}\left(f_S(2) + f_S(1) + \frac{3}{2} f_S(0)\right) = \frac{1}{3}\left(e^{-2} + e^{-2} + \frac{3}{2}e^{-2}\right) = \frac{7}{6}e^{-2}$.

Contoh implementasi rekursi Panjer dalam program **R** dengan menggunakan **Panjer.Bin** *function* yaitu,

```
Panjer.Poi<-          function(theta,p,
maks=100)
{
if    (sum(p)>1||any(p<0))    stop("p
parameter not a density")
fs=NULL
d=length(p)
fs[1]=exp(-theta*(1- p[1]))
for (s in 1:maks){
        ptemp=NULL
        if ((s+1)<=d) ptemp=p[2:(s+1)]
        if ((s+1)>d) {
                ptemp=p[2:d]
                ptemp[d:s]=0
                }
        ptemp=ptemp*((1:s)*theta)
        ftemp=fs[s:1]
```

```
        fs[s+1]=((1/s)*p[1]))*(ptemp%*%ftemp)
        if (sum(fs)>0.99999999) break
}
return(fs)
}
```

i. Distrbusi Binomial Negatif $(r,\theta)$ memenuhi $q_n = q_{n-1}\left(a+\frac{b}{n}\right)$, dengan $a = 1-\theta$, dan $b = a(r-1) = (1-\theta)(r-1)$. Dengan $\theta = 1-a$ dan $r = 1+\frac{b}{a}$ sehingga $0 < a < 1$ dan $a+b > 0$, atau $a = 1-\theta$, dan $b = a(r-1) = (1-\theta)(r-1)$. Persamaan 3.1 untuk distribusi Binomial Negatif $(r,\theta)$ adalah,

$$f(0) = \begin{cases} \Pr[N=0] = \binom{r+0-1}{0}\theta^r (1-\theta)^0 = \theta^r, & jika\ p(0)=0 \\ m_N(\log p(0)) = \left(\frac{\theta}{1-(1-\theta)p(0)}\right)^r, & jika\ p(0)>0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{1-(1-\theta)p(0)}\sum_{h=1}^{s}\left((1-\theta)+\frac{(1-\theta)(r-1)h}{s}\right)p(h)\,f(s-h) \\ &= \frac{(1-\theta)}{1-(1-\theta)p(0)}\sum_{h=1}^{s}\left(1+\frac{(r-1)h}{s}\right)p(h)\,f(s-h), \quad s = 1,2,\ldots \end{aligned}$$

Contoh implementasi rekursi Panjer dalam program **R** dengan menggunakan **Panjer.Bin** *function* yaitu,

```
Panjer.NegBin<- function(r,theta,p, maks=100)
{
if (sum(p)>1||any(p<0)) stop("p parameter not a density")
fs=NULL
d=length(p)
fs[1]=(theta/(1-(1-theta)*p[1]))^r
for (s in 1:maks){
        ptemp=NULL
        if ((s+1)<=d) ptemp=p[2:(s+1)]
        if ((s+1)>d) {
                ptemp=p[2:d]
                ptemp[d:s]=0
                }
        ptemp=ptemp*((1:s)*(r-1)/s+1)
        ftemp=fs[s:1]
        fs[s+1]=((1-theta)/(1-(1-theta)*p[1]))*(ptemp%*%ftemp)
        if (sum(fs)>0.99999999) break
}
return(fs)
}
```

ii. Distrbusi Binomial $(k,\theta)$ memenuhi $q_n = q_{n-1}\left(a+\frac{b}{n}\right)$, dengan atau $a=\dfrac{\theta}{\theta-1}$, dan $b=(1+k)\left(\dfrac{\theta}{1-\theta}\right)$.

Dengan $\theta=\dfrac{a}{a-1}$ dan $k=-\dfrac{b+a}{a}$,

sehingga $a<0$ dan $b=-a(k+1)$,

Persamaan 3.1 untuk distribusi Binomial $(k,\theta)$ adalah,

$$f(0)=\begin{cases}\Pr[N=0]=\binom{k}{0}\theta^0(1-\theta)^{k-0}=(1-\theta)^k & ,\ jika\ p(0)=0\\ m_N(\log p(0))=\left(1-\theta+\theta e^{\log p(0)}\right)^k=(1-\theta+\theta.p(0))^k & ,\ jika\ p(0)>0\end{cases}.$$

$$\begin{aligned}f(s)&=\frac{1}{1-\left(\frac{\theta}{\theta-1}\right)p(0)}\sum_{h=1}^{s}\left(\left(\frac{\theta}{\theta-1}\right)+\frac{(1+k)\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)h}{s}\right)p(h)f(s-h)\\
&=\frac{\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)}{1-\left(\frac{\theta}{\theta-1}\right)p(0)}\sum_{h=1}^{s}\left(-1+\frac{(1+k)h}{s}\right)p(h)f(s-h)\\
&=\frac{\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)}{\left(\frac{\theta-1}{\theta-1}\right)-\left(\frac{\theta}{\theta-1}\right)p(0)}\sum_{h=1}^{s}\left(-1+\frac{(1+k)h}{s}\right)p(h)f(s-h)\\
&=\frac{-\theta}{\theta-1-\theta p(0)}\sum_{h=1}^{s}\left(-1+\frac{(1+k)h}{s}\right)p(h)f(s-h)\\
&=\frac{-\theta}{\theta(1-p(0))-1}\sum_{h=1}^{s}\left(-1+\frac{(1+k)h}{s}\right)p(h)f(s-h),\quad s=1,2,\ldots\end{aligned}.$$

Contoh implementasi rekursi Panjer dalam program **R** dengan menggunakan **Panjer.Bin** *function* yaitu,

```
Panjer.Bin<- function(k,theta,p,
maks=100)
{
if (sum(p)>1||any(p<0)) stop("p
parameter not a density")
fs=NULL
d=length(p)
fs[1]=(1-theta+theta*p[1])^k
for (s in 1:maks){
    ptemp=NULL
    if ((s+1)<=d) ptemp=p[2:(s+1)]
    if ((s+1)>d) {
        ptemp=p[2:d]
        ptemp[d:s]=0
        }
    ptemp=ptemp*((1:s)*(1+k)/s-1)
    ftemp=fs[s:1]
    fs[s+1]=(-theta)/(theta*(1-p[1])-
1)*(ptemp%*%ftemp)
    if (sum(fs)>0.99999999) break
}
return(fs)
}
```

## SIMPULAN

Algoritma rekursi Panjer mempermudah evaluasi dari distribusi gabungan dibandingkan algoritma konvolusi. Akan tetapi algoritma rekursi hanya dapat dijalankan untuk distribusi gabungan tertentu saja yaitu distribusi gabungan Poisson, Negatif Binomial, dan Binomial.

## DAFTAR PUSTAKA

Bowers, et. al. 1997, *Actuarial Mathematics*, 2nd Edition, Society of Actuaries.

Crawley, M. J., 2007, *The R Book*, John Wiley & Sons, Ltd.

Kass, R. 2008, *Modern Actuarial Risk Theory using R*, Springer Verlag.

Klugman, Stuart A., Panjer, Harry H. and Willmot, Gordon E. 2004. *Loss Models from Data to Decisions*, 2nd edition. New Jersey : John Wiley & Sons, Inc.

Rice, J. A. (1995), *Mathematical Statistics and Data Analysis*, 2nd Edition, Duxbury Press, Belmont, CA.