Available online at: http://journal.uny.ac.id/index.php/pythagoras
PYTHAGORAS: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika, 17 (2), 2022, 400-414

Teori Titik Tetap untuk Pemetaan $(\psi,\varphi)_\Omega$-kontraksi pada Ruang p-metrik Modular Berorder

Afifah Hayati [1*], Lusi Harini [2], Ambar Winarni [1], Nur'aini Muhassanah [1]
[1] Department of Mathematics, Universitas Nahdlatul Ulama Purwokerto, Indonesia
[2] Department of Mathematics Education, Universitas Negeri Yogyakarta, Indonesia
* Corresponding Author. E-mail: afifahhayati.mail@gmail.com

ARTICLE INFO

Article History:
Received: 31-Aug. 2022
Revised: 14-Nov. 2022
Accepted: 14-Dec.2022

Keywords:
Teoti titik tetap, ruang metrik modular lengkap, ruang p-metrik modular berorder.

ABSTRACT

Penelitian ini bertujuan untuk memberikan definisi pemetaan $(\psi,\varphi)_\Omega$-kontraksi dalam ruang p-metrik modular, memberikan teorema titik tetap untuk pemetaan $(\psi,\varphi)_\Omega$-kontraksi pada ruang p-metrik modular, dan memberikan aplikasi dari teorema titik tetap tersebut. Penelitian ini dilakukan dengan memperumum definisi pemetaan $(\psi,\varphi)_\Omega$-kontraksi dalam ruang p-metrik dan teorema titik tetapnya ke dalam ruang p-metrik modular. Hasil penelitian menunjukkan bahwa pemetaan $(\psi,\varphi)_\Omega$-kontraksi dapat didefinisikan dalam ruang p-metrik modular dan teorema titik tetap untuk pemetaan tersebut pada ruang p-metrik modular dapat diberikan dengan penambahan beberapa sifat yang diasumsikan. Selain itu, hasil penelitian lainnya adalah aplikasi teorema titik tetap tersebut yang menjamin eksistensi solusi suatu persamaan integral yang juga merupakan perumuman dari aplikasi teorema titik tetap tersebut dalam ruang p-metrik. Dari hasil tersebut, dapat disimpulkan bahwa pemetaan $(\psi,\varphi)_\Omega$-kontraksi dapat didefinisikan dalam ruang p-metrik modular dan dapat dibuktikan teorema titik tetap untuk pemetaan $(\psi,\varphi)_\Omega$-kontraksi pada ruang p-metrik modular beserta aplikasi dari teorema titik tetap tersebut yang menjamin eksistensi solusi suatu persamaan integral.

This research aims to provide the definition of $(\psi,\varphi)_\Omega$-contraction mappings in modular p-metric spaces, give fixed point theorems for $(\psi,\varphi)_\Omega$-contraction mappings on modular p-metric spaces and provide an application of the fixed point theorem. This research was conducted by generalizing the definition of $(\psi,\varphi)_\Omega$-contraction mappings in p-metric spaces and its fixed point theorem into modular p-metric spaces. The results show that the $(\psi,\varphi)_\Omega$-contraction mappings can be defined in modular p-metric spaces and the fixed point theorem for that mapping in modular p-metric spaces can be given by adding some assumed properties. In addition, other research results are the application of the fixed point theorem which guarantees the existence of an integral equation solution which is also a generalization of the application of the fixed point theorem in p-metric spaces. From these results, it can be concluded that $(\psi,\varphi)_\Omega$-contraction mappings can be defined in modular p-metric spaces and it can be proved that the fixed point theorems for $(\psi,\varphi)_\Omega$-contraction mappings in modular p-metric spaces along with the application of the fixed point theorem that guarantees the existence of an integral equation solution.

How to Cite:
Hayati, A., Harini, L., Winarni, A., & Muhassanah, N. (2022). Teori titik tetap untuk pemetaan $(\psi,\varphi)_\Omega$-kontraksi pada ruang p-metrik modular yang berorder. *Pythagoras: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika, 17*(2), 400-414. https://doi.org/10.21831/pythagoras.v17i2.52985

https://doi.org/10.21831/pythagoras.v17i2.52985

PENDAHULUAN

Ilmu Matematika merupakan salah satu ilmu yang berperan penting dalam perkembangan teknologi dan merupakan ilmu dasar yang digunakan dalam berbagai bidang. Salah satu cabang Ilmu

Matematika yang banyak digunakan di bidang lain adalah Analisis Fungsional yang merupakan cabang matematika analisis yang diantaranya membahas ruang metrik dan ruang bernorma. Cabang ilmu tersebut terus mengalami perkembangan baik teori maupun aplikasinya.

Teori titik tetap dalam ruang metrik merupakan salah satu hasil penelitian di dalam cabang ilmu Analisis Fungsional yang mempunyai cukup banyak aplikasinya. Salah satu aplikasi teorema ini adalah untuk membuktikan eksistensi solusi persamaan integral dan membantu menyelesiakan persamaan tersebut. Pada tahun 1990, Goebel & Kirk (1990) menyatakan bahwa munculnya teori titik tetap berawal dari Prinsip Kontraksi Banach dalam tesis yang terbit pada tahun 1922 untuk pemetaan kontraksi. Selanjutnya, Morales & Rojas (2012) menyatakan bahwa pada tahun 1984, Khan et al. (1984) memperkenalkan suatu fungsi kontrol yang disebut sebagai *altering distance functions*, yaitu suatu fungsi ψ yang memenuhi $\psi(0) = 0$ serta ψ merupakan fungsi naik monoton dan kontinu. Di tahun-tahun selanjutnya, berkembang teorema titik tetap yang mengacu pada *altering distance functions*.

Konsep ruang metrik diperkenalkan oleh Frechét (1906), seorang matematikawan Prancis. Berbagai konsep ruang yang lebih umum dari ruang metrik bermunculan di tahun-tahun berikutnya. Czerwik (1998) memperkenalkan suatu ruang yang lebih umum dari ruang metrik yang disebut sebagai ruang b-metrik yang memperumum sifat ketaksamaan segitiga dalam ruang metrik yang melibatkan konstanta $s \geq 1$. Selanjutnya, Parvaneh & Ghoncheh (2019) memperkenalkan ruang yang lebih umum dari ruang b-metrik yang disebut ruang p-metrik yang melibatkan suatu fungsi kontinu dan naik tegas Ω pada ketaksamaan segitiganya. Lebih lanjut, diberikan pula definisi barisan p-konvergen, barisan p-Cauchy, serta ruang p-metrik yang p-lengkap. Selain itu, Parvaneh & Ghonceh (2019) juga memperkenalkan suatu pemetaan pada ruang p-metrik yang lebih umum dari pemetaan kontraksi dalam ruang p-metik yang disebut sebagai pemetaan $(\psi, \varphi)_\Omega$-kontraksi dengan ψ dan φ merupakan dua *altering distance functions*. Lebih lanjut, Parvaneh & Ghonceh (2019) memberikan teorema titik tetap untuk pemetaan tersebut pada ruang p-metrik yang berorder, yaitu pemetaan $(\psi, \varphi)_\Omega$-kontraksi $f: X \to X$ yang kontinu dan naik berorder dengan $\left(X, \preceq, \tilde{d}\right)$ ruang p-metrik berorder parsial yang p-lengkap mempunyai titik tetap jika terdapat $x_0 \in X$ dengan $x_0 \preceq f(x_0)$. Selain itu, diberikan suatu teorema titik tetap yang membutuhkan sifat ruang p-metrik yang mempunyai *sequential limit comparison property* (*s.l.c.p.*). Suatu ruang p-metrik berorder $\left(X, \preceq, \tilde{d}\right)$ dikatakan mempunyai *sequential limit comparison property* (*s.l.c.p.*) jika setiap barisan naik monoton $\{x_n\} \subseteq X$ yang konvergen ke $x \in X$ berakibat $x_n \preceq x$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Teorema titik tetap yang menggunakan sifat tersebut menyatakan bahwa pemetaan $(\psi, \varphi)_\Omega$-kontraksi $f: X \to X$ yang naik berorder dengan $\left(X, \preceq, \tilde{d}\right)$ ruang p-metrik berorder parsial yang mempunyai *s.l.c.p.* dan p-lengkap mempunyai titik tetap jika terdapat $x_0 \in X$ dengan $x_0 \preceq f(x_0)$. Selanjutnya, Parvaneh & Ghonceh (2019) memberikan aplikasi teorema titik tetap tersebut untuk menunjukkan eksistensi solusi dari suatu persamaan integral. Teorema titik tetap untuk pemetaan kontraktif pada ruang metrik berorder parsial juga dijelaskan dalam Nieto & Rodríguez-López (2005).

Pada tahun 1983, Musielak (1983) memperkenalkan suatu fungsional pada ruang vektor real yang lebih umum dari norma pada ruang bernorma yang disebut sebagai modular. Selanjutnya, Chistyakov (2010) mengembangkan gagasan modular ke sebarang himpunan tak kosong dengan cara mengembangkan teori ruang metrik yang dibangun oleh modular. Suatu himpunan tak kosong X yang dilengkapi metrik modular ω dengan $\omega: (0, \infty) \times X \times X \to [0, \infty]$, dituliskan sebagai pasangan (X, ω), disebut ruang metrik modular. Selain mencakup ruang metrik, ruang metrik modular ini juga mencakup ruang lain, seperti ruang bernorma maupun ruang bermodular. Setelah memperkenalkan konsep ruang metrik modular, Chistyakov (2011) memberikan teorema titik tetap untuk pemetaan kontraksi pada ruang metrik modular. Dalam pembahasan teorema titik tetap tersebut, diberikan konsep barisan yang meliputi barisan konvergen dan barisan Cauchy di dalam ruang metrik modular yang melibatkan suatu bilangan $\lambda > 0$ dan disebut sebagai barisan ω_λ-konvergen serta barisan ω_λ-Cauchy. Selain itu, dibutuhkan suatu kondisi untuk metrik modular ω yang dikenal sebagai kondisi-Δ_2 dalam pembuktian teorema titik tetap tersebut. Chistyakov (2015) memberikan definisi suatu metrik modular ω yang memenuhi kondisi-Δ_2. Selain Kondisi-Δ_2 tersebut, Chaira et al. (2020) memberikan suatu kondisi untuk metrik modular ω yang disebut sebagai kondisi tipe-Δ_2 dengan sifat setiap metrik modular ω yang memenuhi kondisi tipe-Δ_2 pasti memenuhi kondisi-Δ_2.

Beberapa konsep ruang yang lebih umum dari ruang metrik modular bermunculan di tahun-tahun selanjutnya. Salah satu perumuman dari ruang metrik modular adalah konsep ruang b-metrik modular yang diperkenalkan oleh Ege & Alaca (2018). Sementara itu teorema titik tetap di ruang b-metrik dijelaskan dalam Iqbal et al. (2021) dan Kir, M., & Hükmi Kiziltun (2013). Ruang b-metrik modular memperumum sifat pertidaksamaan segitiga dalam ruang metrik modular dengan melibatkan suatu konstanta $s \geq 1$. Suatu himpunan tak kosong X yang dilengkapi b-metrik modular ν dengan $\nu: (0, \infty) \times X \times X \to [0, \infty]$, dituliskan sebagai (X, ν), disebut sebagai ruang b-metrik modular. Parvaneh, et al. (2019) memberikan definisi barisan konvergen dan barisan Cauchy di dalam ruang b-metrik modular dan disebut sebagai barisan ν-konvergen serta barisan ν-Cauchy. Selain itu, Parvaneh et al. (2019) memberikan sifat barisan yang ν-konvergen yang berhubungan dengan limit superior barisan tersebut pada ruang b-metrik modular. Lebih lanjut, Gholidahneh et al. (2021) memperkenalkan konsep ruang p-metrik modular yang lebih umum dari ruang b-metrik modular. Ruang p-metrik modular memperumum ruang b-metrik modular dengan memperumum konstanta $s \geq 1$ yang terdapat dalam definisi b-metrik modular menjadi suatu fungsi $\Omega: [0, \infty) \to [0, \infty)$ yang kontinu dan naik tegas dengan $\Omega^{-1}(t) \leq t \leq \Omega(t)$, untuk $t \in [0, \infty)$.

Selain ruang tersebut, terdapat jenis ruang lain yang juga perumuman ruang metrik modular, yaitu ruang metrik modular teritlak. Salah satu bentuk perumuman ruang metrik modular teritlak adalah memperumum sifat ketaksamaan segitiga dalam ruang metrik modular. Harini (2019) memberikan teorema titik tetap untuk pemetaan Kannan pada ruang metrik modular teritlak. Pemetaan Kannan sendiri merupakan salah satu perumuman dari pemetaan kontraksi. Selanjutnya, terdapat suatu teorema yang merupakan perumuman dari teorema titik tetap, yaitu teorema titik *coincidence*. Hayati (2022) memberikan beberapa teorema titik *coincidence* pada ruang bermodular.

Dengan adanya konsep ruang p-metrik modular yang lebih umum dari ruang p-metrik, penulis mendefinisikan pemetaan $(\psi, \varphi)_\Omega$-kontraksi pada ruang p-metrik modular dimana pemetaan tersebut telah didefinisikan pada ruang p-metrik. Selanjutnya, berdasarkan teorema titik tetap untuk pemetaan tersebut pada ruang p-metrik berorder, penulis juga memberikan teorema titik tetap untuk pemetaan $(\psi, \varphi)_\Omega$-kontraksi pada ruang p-metrik modular yang berorder. Lebih lanjut, dalam ruang p-metrik juga telah diberikan aplikasi teorema tersebut untuk menunjukkan eksistensi solusi dari suatu persamaan integral. Oleh karena itu, penulis juga memberikan aplikasi teorema titik tetap untuk pemetaan $(\psi, \varphi)_\Omega$-kontraksi pada ruang p-metrik modular yang berorder untuk menunjukkan eksistensi solusi dari suatu persamaan integral.

METODE

Metode penelitian dalam artikel ini adalah studi literatur dengan mempelajari konsep-konsep dasar matematika analisis yang telah dijelaskan dalam Rudin (1976) dan beberapa literatur hasil penelitian ruang metrik modular, ruang p-metrik, ruang p-metrik modular, dan pemetaan $(\psi, \varphi)_\Omega$-kontraksi dalam ruang p-metrik yang menjadi dasar untuk mendefinisikan pemetaan $(\psi, \varphi)_\Omega$-kontraksi dalam ruang p-metrik modular. Selanjutnya, dipelajari mengenai teorema titik tetap untuk pemetaan $(\psi, \varphi)_\Omega$-kontraksi pada ruang p-metrik yang menjadi dasar untuk memberikan teorema titik tetap untuk pemetaan tersebut pada ruang p-metrik modular. Lebih lanjut, dipelajari aplikasi teorema titik tetap untuk pemetaan $(\psi, \varphi)_\Omega$-kontraksi pada ruang p-metrik yang menjadi dasar untuk mempelajari aplikasi teorema titik tetap untuk pemetaan $(\psi, \varphi)_\Omega$-kontraksi pada ruang p-metrik modular.

Adapun langkah-langkah penelitian yang digunakan adalah (1) memberikan definisi ruang p-metrik modular beserta sifat-sifatnya, (2) memberikan definisi pemetaan $(\psi, \varphi)_\Omega$-kontraksi dalam ruang p-metrik modular, (3) memberikan teorema titik tetap untuk pemetaan $(\psi, \varphi)_\Omega$-kontraksi pada ruang p-metrik modular, dan (4) memberikan aplikasi teorema titik tetap untuk pemetaan $(\psi, \varphi)_\Omega$-kontraksi pada ruang p-metrik modular.

Selanjutnya, dalam pembuktian teorema-teorema yang diberikan digunakan metode pembuktian dalam matematika diantaranya metode pembuktian langsung, metode pembuktian dengan kontradiksi, dan metode pembuktian dengan induksi matematika. Metode pembuktian langsung digunakan dalam membuktikan Teorema 2, Teorema 4, Teorema 10, Teorema 11, Teorema 12, Teorema 16, Teorema 17, Teorema 18, Teorema 19, dan Teorema 20. Sedangkan dalam pembuktian Teorema 13 dan Teorema 15, digunakan beberapa metode pembuktian, yaitu metode pembuktian dengan induksi matematika, metode pembuktian langsung, dan metode pembuktian dengan kontradiksi. Dalam artikel yang berjudul "Metoda Pembuktian dalam Matematika", Hernadi (2008) menjelaskan proses pembuktian dengan metode-metode tersebut.

HASIL PENELITIAN

Gholidahneh, et al. (2021) memperkenalkan ruang yang lebih umum dari ruang b-metrik modular yang disebut ruang p-metrik modular dengan definisi sebagai berikut.

Definisi 1. Diketahui X himpunan tak kosong. Fungsi $\hat{v}: (0,\infty) \times X \times X \to [0,\infty]$ disebut p-metrik modular jika terdapat fungsi $\Omega: [0,\infty) \to [0,\infty)$ yang kontinu dan naik tegas dengan $\Omega^{-1}(t) \leq t \leq \Omega(t)$, untuk $t \in [0,\infty)$ sehingga untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku

(i) $\hat{v}(\lambda, x, y) = 0$, untuk setiap $\lambda > 0 \Leftrightarrow x = y$,

(ii) $\hat{v}(\lambda, x, y) = \hat{v}(\lambda, y, x)$, untuk setiap $\lambda > 0$, dan

(iii) $\hat{v}(\lambda + \mu, x, y) \leq \Omega[\hat{v}(\lambda, x, z) + \hat{v}(\mu, z, y)]$, untuk setiap $\lambda, \mu > 0$.

Selanjutnya, pasangan $(X, \hat{v})$, yaitu X yang dilengkapi p-metrik modular $\hat{v}$, disebut ruang p-metrik modular. Setiap ruang b-metrik modular merupakan ruang p-metrik modular dengan $\Omega(t) = st$ dan semua ruang metrik modular merupakan p-metrik modular dengan $\Omega(t) = t$. Pada pembahasan selanjutnya, agar penulisan lebih sederhana, untuk setiap $\lambda > 0$ dan $x, y \in X$, p-metrik modular $\hat{v}$ dituliskan sebagai $\hat{v}(\lambda, x, y) = \hat{v}_\lambda(x, y)$.

Selain memperkenalkan definisi ruang p-metrik modular, Gholidahneh, et al. (2021) memberikan sifat yang menyatakan hubungan p-metrik modular dan b-metrik modular yang dinyatakan sebagai berikut.

Teorema 2. Diketahui (X, v) ruang b-metrik modular dengan koefisien $s \geq 1$. Jika fungsi $\hat{v}: (0,\infty) \times X \times X \to [0,\infty]$ dengan definisi

$$\hat{v}_\lambda(x, y) = \xi\big(v_\lambda(x, y)\big), \text{ untuk setiap } \lambda > 0 \text{ dan } x, y \in X$$

dengan $\xi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ fungsi kontinu dan naik tegas dengan $t \leq \xi(t)$, untuk setiap $t \geq 0$ dan $\xi(0) = 0$, maka $\hat{v}$ p-metrik modular dengan $\Omega(t) = \xi(st)$.

Bukti. Pembuktian Aksioma (i) dan (ii) pada Definisi 1 cukup jelas, tinggal membuktikan Aksioma (iii). Diperhatikan bahwa untuk setiap $x, y, z \in X$ dan $\lambda, \mu > 0$ berlaku

$$\hat{v}_{\lambda+\mu}(x, y) \leq \xi\left(s\, \xi\big(v_\lambda(x, z)\big) + s\, \xi\left(v_\mu(z, y)\right)\right) = \Omega\left(\hat{v}_\lambda(x, z) + \hat{v}_\mu(z, y)\right),$$

maka, Aksioma (iii) pada Definisi 1 terbukti. Jadi, benar bahwa $\hat{v}$ merupakan p-metrik modular. ■

Seperti halnya pada ruang metrik modular dan ruang b-metrik modular, pengertian barisan konvergen, barisan Cauchy, dan ruang p-metrik modular lengkap dapat didefinisikan di dalam ruang p-metrik modular yang dinyatakan sebagai berikut.

Definisi 3. Diberikan $\lambda > 0$ dan ruang p-metrik modular $(X, \hat{v})$.

(i) Suatu barisan $\{x_n\} \subseteq X$ dikatakan $\hat{v}_\lambda$-konvergen ke $x \in X$ jika $\hat{v}_\lambda(x_n, x) \to 0$, untuk $n \to \infty$. Selanjutnya, x disebut $\hat{v}_\lambda$-limit barisan $\{x_n\}$.

(ii) Suatu barisan $\{x_n\} \subseteq X$ dikatakan $\hat{v}_\lambda$-konvergen jika terdapat $x \in X$ sehingga $\{x_n\} \subseteq X$ $\hat{v}_\lambda$-konvergen ke $x \in X$.

(iii) Suatu barisan $\{x_n\} \subseteq X$ disebut barisan $\hat{v}_\lambda$-Cauchy jika $\hat{v}(x_n, x_m) \to 0$, untuk $n, m \to \infty$.

(iv) Ruang metrik $(X, \hat{v})$ dikatakan $\hat{v}_\lambda$-lengkap jika setiap barisan $\hat{v}_\lambda$-Cauchy merupakan barisan $\hat{v}_\lambda$-konvergen.

Parvaneh, et al. (2019) memberikan sifat dua barisan yang v_λ-konvergen yang berhubungan dengan limit superior barisan tersebut pada ruang b-metrik modular. Dalam pembuktian teorema titik tetap untuk pemetaan $(\psi, \varphi)_\Omega$-kontraksi pada ruang p-metrik modular yang berorder, diperlukan sifat yang serupa dengan memperumum sifat tersebut ke dalam ruang p-metrik modular. Oleh karena itu, diberikan sifat dua barisan $\hat{v}_\lambda$-konvergen yang berhubungan dengan limit superior dan limit inferior barisan tersebut di dalam ruang p-metrik modular yang dinyatakan sebagai berikut.

Teorema 4. Diberikan $\lambda > 0$ dan ruang p-metrik modular $(X, \hat{v})$ dengan $\Omega: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fungsi yang kontinu dan naik tegas dengan $\Omega^{-1}(t) \leq t \leq \Omega(t)$, untuk setiap $t \in [0, \infty)$. Jika barisan $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ $\hat{v}_\lambda$-konvergen di dalam X secara berturut-turut ke $x, y \in X$, maka

$$(\Omega^2)^{-1}\big(\hat{v}_\lambda(x, y)\big) \leq \liminf_{n\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{4}}(x_n, y_n) \text{ dan } \limsup_{n\to\infty} \hat{v}_\lambda(x_n, y_n) \leq \Omega^2\left(\hat{v}_{\frac{\lambda}{4}}(x, y)\right).$$

Lebih lanjut, untuk setiap $z \in X$ berlaku

$$\Omega^{-1}\big(\hat{v}_\lambda(x, z)\big) \leq \liminf_{n\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, z) \text{ dan } \limsup_{n\to\infty} \hat{v}_\lambda(x_n, z) \leq \Omega\left(\hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x, z)\right).$$

Bukti. Berdasarkan Aksioma (iii) pada Definisi 1, diperoleh untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\hat{v}_\lambda(x, y) \leq \Omega\left(\hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x, x_n) + \Omega\left(\hat{v}_{\frac{\lambda}{4}}(x_n, y_n) + \hat{v}_{\frac{\lambda}{4}}(y_n, y)\right)\right)$$

dan

$$\hat{v}_\lambda(x_n, y_n) \leq \Omega\left(\hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, x) + \Omega\left(\hat{v}_{\frac{\lambda}{4}}(x, y) + \hat{v}_{\frac{\lambda}{4}}(y, y_n)\right)\right).$$

Karena barisan $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ $\hat{v}_\lambda$-konvergen secara berturut-turut ke $x, y \in X$ dan Ω kontinu, maka

$$(\Omega^2)^{-1}\big(\hat{v}_\lambda(x, y)\big) \leq \liminf_{n\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{4}}(x_n, y_n), (\Omega^2)^{-1}\big(\hat{v}_\lambda(x, y)\big) \leq \liminf_{n\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{4}}(x_n, y_n),$$

dan

$$\limsup_{n\to\infty} \hat{v}_\lambda(x_n, y_n) \leq \Omega^2\left(\hat{v}_{\frac{\lambda}{4}}(x, y)\right).$$

Lebih lanjut, berdasarkan Aksioma (iii) pada Definisi 1 sifat kekontinuan Ω, diperoleh

$$\Omega^{-1}\big(\hat{v}_\lambda(x, z)\big) \leq \liminf_{n\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, z), \Omega^{-1}\big(\hat{v}_\lambda(x, z)\big) \leq \liminf_{n\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, z),$$

dan

$$\limsup_{n\to\infty} \hat{v}_\lambda(x_n, z) \leq \Omega\left(\hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x, z)\right).$$ ∎

Parvaneh & Ghoncheh (2019) memberikan definisi pemetaan $(\psi, \varphi)_\Omega$-kontraksi berorder dalam ruang b-metrik yang berorder. Oleh karena itu, sebelum memberikan definisi pemetaan $(\psi, \varphi)_\Omega$-kontraksi dalam ruang p-metrik modular yang berorder, akan diberikan terlebih dahulu definisi ruang p-metrik modular yang berorder.

Definisi 5. Diketahui X himpunan tak kosong. Pasangan $(X, \preceq, \hat{v})$ disebut ruang metrik modular berorder jika

(i) $(X, \hat{v})$ ruang modular metrik dan
(ii) $(X, \preceq)$ himpunan berorder.

Selanjutnya, akan diberikan definisi pemetaan $(\psi, \varphi)_\Omega$-kontraksi berorder dalam ruang p-metrik modular yang berorder.

Definisi 6. Diberikan $\lambda > 0$ dan ruang p-metrik modular berorder $(X, \preceq, \hat{v})$. Pemetaan $f: X \to X$ disebut pemetaan $(\psi, \varphi)_{\Omega_\lambda}$-kontraksi berorder jika terdapat dua fungsi *alternating distance* ψ dan φ dan fungsi kontinu naik tegas $\Omega: [0, \infty) \to [0, \infty)$ dengan $\Omega^{-1}(t) \leq t \leq \Omega(t)$, untuk setiap $t \in [0, \infty)$ sehingga untuk setiap *comparable* $x, y \in X$ berlaku

$$\psi\left(\Omega\big(\hat{v}_\lambda(f(x), f(y))\big)\right) \leq \psi\big(M_\lambda(x, y)\big) - \varphi\big(M_\lambda(x, y)\big)$$

dengan

$$M_\lambda(x, y) = \max\big\{\hat{v}_\lambda(x, y), \hat{v}_\lambda\big(x, f(x)\big), \hat{v}_\lambda\big(y, f(y)\big), \hat{v}_\lambda\big(y, f(x)\big)\big\}.$$

Contoh 7. Diberikan $\lambda_0 > 0$ dan himpunan $X = \left[0, 2\sqrt{\lambda_0}\right]$ dan fungsi $\hat{v}: (0, \infty) \times X \times X \to [0, \infty]$ dengan

$$\hat{v}_\lambda(x,y) = e^{\frac{|x-y|^2}{\lambda}} - 1,$$

untuk setiap $x, y \in X$ dan $\lambda > 0$. Dengan menggunakan Teorema 2, akan dibuktikan bahwa $\hat{v}$ merupakan p-metrik modular dengan $\Omega(t) = e^{2t} - 1$, untuk setiap $t \geq 0$.
Diberikan fungsi $\xi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ dengan definisi

$$\xi(t) = e^t - 1, \text{ untuk setiap } t \geq 0,$$

maka ξ merupakan fungsi kontinu dan naik tegas dengan $t \leq \xi(t)$, untuk setiap $t \geq 0$ dan $\xi(0) = 0$.
Selanjutnya, dapat dibuktikan bahwa fungsi $v: (0,\infty) \times X \times X \to [0,\infty]$ dengan definisi

$$v_\lambda(x,y) = \frac{|x-y|^2}{\lambda}, \text{ untuk setiap } \lambda \in (0,\infty) \text{ dan } x, y \in X$$

merupakan b-metrik modular dengan $s = 2$. Akibatnya, berdasarkan Teorema 2, diperoleh

$$\hat{v}_\lambda(x,y) = e^{v_\lambda(x,y)} - 1 = \xi\big(v_\lambda(x,y)\big), \text{ untuk setiap } \lambda > 0 \text{ dan } x, y \in X$$

merupakan p-metrik modular dengan $\Omega(t) = e^{2t} - 1$, untuk setiap $t \geq 0$.
Selanjutnya, diberikan relasi $\preceq$ pada X dengan definisi $x \preceq y \Leftrightarrow x \leq y$, untuk setiap $x, y \in X$ dan fungsi $f: X \to X$ dengan definisi

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{10}\right), \text{ untuk setiap } x \in X.$$

Akan dibuktikan bahwa $f: X \to X$ disebut pemetaan $(\psi,\varphi)_{\Omega_\lambda}$-kontraksi berorder dengan *altering distance functions* $\psi, \varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ yang mempunyai definisi $\psi(t) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\ln(1+t)\right)$ dan $\varphi(t) = \frac{t}{1000}$, untuk setiap $t \geq 0$.
Diambil sebarang $x, y \in X$ dengan $x \preceq y$, maka $x \leq y$. Akibatnya, diperoleh

$$\begin{aligned}
\psi\left(\Omega\left(\hat{v}_{\lambda_0}\big(f(x), f(y)\big)\right)\right) &= \ln\left(1 + \frac{1}{2}\ln\left(1 + \Omega\left(\hat{v}_{\lambda_0}\big(f(x), f(y)\big)\right)\right)\right) \\
&\leq \frac{\left[\ln e^{\left(1+\frac{x}{10}\right)}\right]^2 - 2\left(1 + \frac{x}{10}\right)\left(1 + \frac{y}{10}\right) + \left[\ln e^{\left(1+\frac{y}{10}\right)}\right]^2}{\lambda_0} \\
&\leq \psi\left(M_{\lambda_0}(x,y)\right) - \varphi\left(M_{\lambda_0}(x,y)\right).
\end{aligned}$$

Jadi, benar bahwa f merupakan pemetaan $(\psi,\varphi)_{\Omega_\lambda}$-kontraksi berorder pada X.

Dalam pembuktian teorema titik tetap untuk pemetaan $(\psi,\varphi)_{\Omega_\lambda}$-kontraksi pada ruang p-metrik modular yang berorder, dibutuhkan sifat suatu p-metrik modular yang memenuhi kondisi-Δ_2. Oleh karena itu, akan diberikan definisi p-metrik modular yang memenuhi kondisi-Δ_2 dengan memperumum definisi metrik modular yang mempunyai kondisi-Δ_2.

Definisi 8. Diberikan ruang p-metrik modular $(X, \hat{v})$. Suatu p-metrik modular $\hat{v}$ dikatakan memenuhi kondisi Δ_2 jika untuk setiap barisan $\{x_n\} \subseteq X$ dengan sifat terdapat $x \in X$ dan $\lambda > 0$ sehingga $\lim_{n\to\infty} \hat{v}_\lambda(x_n, x) = 0$ berakibat $\lim_{n\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, x) = 0$.

Selanjutnya, didefinisikan suatu p-metrik modular yang memenuhi kondisi tipe-Δ_2 dengan memperumum kondisi-Δ_2 di dalam ruang metrik modular.

Definisi 9. Diketahui $(X, \hat{v})$ ruang p-metrik modular. Suatu p-metrik modular $\hat{v}$ dikatakan memenuhi kondisi tipe-Δ_2 jika terdapat $K > 0$ sehingga untuk setiap $\lambda > 0$ dan $x, y \in X$ berlaku

$$\hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x,y) \leq K\, \hat{v}_\lambda(x,y).$$

Hubungan ruang p-metrik modular yang memenuhi kondisi-Δ_2 dan kondisi tipe-Δ_2 dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 10. Diberikan ruang p-metrik modular $(X, \hat{v})$. Jika $\hat{v}$ memenuhi kondisi tipe-Δ_2, maka $\hat{v}$ memenuhi kondisi Δ_2.

Bukti. Diambil sebarang barisan $\{x_n\} \subset X$ dengan sifat terdapat $x \in X$ dan $\lambda > 0$ sehingga $\lim_{n\to\infty} \hat{v}_\lambda(x_n, x) = 0$. Diambil sebarang $\epsilon > 0$. Karena $\lim_{n\to\infty} \hat{v}_\lambda(x_n, x) = 0$, maka terdapat $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq n(\epsilon)$ berlaku $\hat{v}_\lambda(x_n, x) < \frac{\epsilon}{K}$. Akibatnya, karena $\hat{v}$ memenuhi kondisi tipe-Δ_2, maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq n(\epsilon)$ berlaku $\hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x,y) \leq K\, \hat{v}_\lambda(x,y) < \epsilon$. Dengan demikian, $\lim_{n\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, x) = 0$. Jadi, benar bahwa $\hat{v}$ memenuhi kondisi Δ_2. ∎

Selanjutnya, sifat suatu p-metrik modular yang memenuhi kondisi-Δ_2 digunakan untuk melihat hubungan barisan yang $\hat{v}_\lambda$-konvergen dan barisan $\hat{v}_\lambda$-Cauchy. Berikut ini sifat yang menyatakan hubungan barisan yang $\hat{v}_\lambda$-konvergen dan barisan $\hat{v}_\lambda$-Cauchy yang dinyatakan dalam teorema sebagai berikut.

Teorema 11. Diberikan $\lambda > 0$ dan ruang p-metrik modular $(X, \hat{v})$ dengan $\hat{v}$ memenuhi kondisi-Δ_2. Jika $\Omega(0)$ dan terdapat barisan $\{x_n\} \subseteq X$ $\hat{v}_\lambda$-konvergen ke x, maka $\{x_n\} \subseteq X$ barisan $\hat{v}_\lambda$-Cauchy.

Bukti. Diketahui $\{x_n\} \subseteq X$ $\hat{v}_\lambda$-konvergen ke x, maka $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{v}_\lambda(x_n, x) = 0$. Karena $\hat{v}$ memenuhi kondisi-Δ_2, maka diperoleh $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, x) = 0$. Berdasarkan Aksioma (iii) pada Definisi 3, karena Ω kontinu, maka $\lim\limits_{n,m\to\infty} \hat{v}_\lambda(x_n, x_m) \leq \Omega\left(\lim\limits_{n,m\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, x) + \lim\limits_{n,m\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x, x_m)\right) = 0$. Dengan demikian, benar bahwa $\{x_n\} \subseteq X$ barisan $\hat{v}_\lambda$-Cauchy. ■

Adapun sifat barisan $\hat{v}_\lambda$-Cauchy yang juga menggunakan sifat suatu p-metrik modular yang memenuhi kondisi-Δ_2 adalah sebagai berikut.

Teorema 12. Diberikan $\lambda > 0$ dan ruang p-metrik modular $(X, \hat{v})$ dengan $\hat{v}$ memenuhi kondisi tipe-Δ_2. Jika $\{x_n\}$ barisan $\hat{v}_\lambda$-Cauchy, maka

$$\lim_{n,m\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, x_m) = 0.$$

Bukti. Karena $\{x_n\}$ barisan $\hat{v}_\lambda$-Cauchy, maka $\lim\limits_{n,m\to\infty} \hat{v}_\lambda(x_n, x_m) = 0$. Selanjutnya, karena $\hat{v}$ memenuhi kondisi tipe-Δ_2, maka terdapat $K > 0$ sehingga untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$ dan $\lambda > 0$ di atas berlaku

$$\hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, x_m) \leq K\, \hat{v}_\lambda(x_n, x_m)$$

Dengan demikian, diperoleh $\lim\limits_{n,m\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, x_m) = 0$. ■

Selanjutnya, diberikan teorema titik tetap untuk pemetaan $(\psi, \varphi)_{\Omega_\lambda}$-kontraksi pada ruang p-metrik modular yang berorder yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 13. Diberikan $\lambda > 0$ dan ruang p-metrik modular berorder $(X, \preceq, \hat{v})$ yang $\hat{v}_\lambda$-lengkap, pemetaan $f: X \to X$ merupakan pemetaan $(\psi, \varphi)_{\Omega_\lambda}$-kontraksi berorder yang naik dan kontinu, dan $\hat{v}$ memenuhi kondisi-Δ_2. Jika $\Omega(0) = 0$ dan terdapat $x_0 \in X$ sehingga $x_0 \preceq f(x_0)$, maka f mempunyai titik tetap.

Bukti. Didefinisikan $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ dan barisan $(x_n) \subseteq X$ sehingga

$$x_{n+1} = f(x_n), \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}_0.$$

Dengan induksi matematika, dapat dibuktikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}_0$ berlaku $x_n \preceq x_{n+1}$. Jika $x_{n_0} = x_{n_0+1}$, untuk suatu $n_0 \in \mathbb{N}$, maka $x_{n_0} = f(x_{n_0})$ yang berart x_{n_0} merupakan titik tetap f. Selanjutnya, diasumsikan $x_n \neq x_{n+1}$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena $f: X \to X$ disebut pemetaan $(\psi, \varphi)_{\Omega_\lambda}$-kontraksi berorder dan $\Omega^{-1}(t) \leq t \leq \Omega(t)$, untuk setiap $t \in [0, \infty)$ serta ψ naik, maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\psi(\hat{v}_\lambda(x_n, x_{n+1})) \leq \psi\left(\Omega(\hat{v}_\lambda(x_n, x_{n+1}))\right) \leq \psi(M_\lambda(x_{n-1}, x_n)) - \varphi(M_\lambda(x_{n-1}, x_n))$$

dengan $M_\lambda(x_{n-1}, x_n) = \max\{\hat{v}_\lambda(x_{n-1}, x_n), \hat{v}_\lambda(x_n, x_{n+1})\}$. Akibatnya, diperoleh untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\begin{aligned}\psi(\hat{v}_\lambda(x_n, x_{n+1})) &\leq \psi(\max\{\hat{v}_\lambda(x_{n-1}, x_n), \hat{v}_\lambda(x_n, x_{n+1})\}) - \varphi(\max\{\hat{v}_\lambda(x_{n-1}, x_n), \hat{v}_\lambda(x_n, x_{n+1})\}) \\ &< \psi(\max\{\hat{v}_\lambda(x_{n-1}, x_n), \hat{v}_\lambda(x_n, x_{n+1})\}).\end{aligned}$$

Jika $\max\{\hat{v}_\lambda(x_{n-1}, x_n), \hat{v}_\lambda(x_n, x_{n+1})\} = \hat{v}_\lambda(x_n, x_{n+1})$, maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\psi(\hat{v}_\lambda(x_n, x_{n+1})) < \psi(\hat{v}_\lambda(x_n, x_{n+1})).$$

Dengan kata lain, terjadi kontradiksi dalam pernyataan tersebut. Oleh karena itu, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\max\{\hat{v}_\lambda(x_{n-1}, x_n), \hat{v}_\lambda(x_n, x_{n+1})\} = \hat{v}_\lambda(x_{n-1}, x_n).$$

Akibatnya, diperoleh untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\psi(\hat{v}_\lambda(x_n, x_{n+1})) \leq \psi(\hat{v}_\lambda(x_{n-1}, x_n)) - \varphi(\hat{v}_\lambda(x_{n-1}, x_n)) < \psi(\hat{v}_\lambda(x_{n-1}, x_n)).$$

Karena ψ fungsi naik, maka $\{\hat{v}_\lambda(x_n, x_{n+1}) \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{\hat{v}_\lambda(x_{n-1}, x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ merupakan barisan bilangan positif yang turun monoton dan terbatas ke bawah oleh 0. Dengan demikian, terdapat $r_\lambda \geq 0$ sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \hat{v}_\lambda(x_n, x_{n+1}) = r_\lambda \text{ atau} \lim_{n\to\infty} \hat{v}_\lambda(x_{n-1}, x_n) = r_\lambda.$$

Lebih lanjut, karena ψ dan φ kontinu, maka

$$\psi\left(\lim_{n\to\infty} \hat{v}_\lambda(x_n, x_{n+1})\right) \le \psi\left(\lim_{n\to\infty} \hat{v}_\lambda(x_{n-1}, x_n)\right) - \varphi\left(\lim_{n\to\infty} \hat{v}_\lambda(x_{n-1}, x_n)\right) < \psi\left(\lim_{n\to\infty} \hat{v}_\lambda(x_{n-1}, x_n)\right)$$

sehingga $\psi(r_\lambda) \le \psi(r_\lambda) - \varphi(r_\lambda) \le \psi(r_\lambda)$. Dengan demikian, $\varphi(r_\lambda) = 0$ sehingga $r_\lambda = 0$. Jadi, diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} \hat{v}_\lambda(x_n, x_{n+1}) = 0 \text{ dan } \lim_{n\to\infty} \hat{v}_\lambda(x_{n-1}, x_n) = 0.$$

Akibatnya, karena $\hat{v}$ memenuhi kondisi-Δ_2, maka menurut Teorema 12, untuk $\mu = \lambda, \frac{\lambda}{2}$, dan $\frac{\lambda}{4}$, nilai limit, limit superior, limit inferior dari barisan $\{\hat{v}_\lambda(x_{n-1}, x_n)\}$ dan $\{\hat{v}_\lambda(x_{n-1}, x_n)\}$ adalah 0. Selanjutnya, akan dibuktikan $\{x_n\} \subseteq X$ barisan $\hat{v}_\lambda$-Cauchy.

Andaikan $\{x_n\}$ bukan barisan $\hat{v}_\lambda$-Cauchy, maka terdapat $\epsilon_0 > 0$ dan subbarisan $\{x_{n_k}\}$ dan $\{x_{m_k}\}$ sehingga untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ dengan $n_k, m_k \ge k$ berlaku $\hat{v}_\lambda(x_{n_k}, x_{m_k}) \ge \epsilon_0$. Diambil n_i merupakan indeks terkecil dengan $n_i > m_i > i$ sehingga

$$\hat{v}_\lambda(x_{m_i}, x_{n_i}) \ge \epsilon_0.$$

Akibatnya, diperoleh

$$\hat{v}_\lambda(x_{m_i}, x_{n_{i-1}}) < \epsilon_0.$$

Berdasarkan Aksioma (iii) pada Definisi 1, diperoleh

$$(\Omega^2)^{-1}(\epsilon_0) \le \lim\inf_{i\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{4}}(x_{m_{i-1}}, x_{n_{i-1}})$$

Akibatnya, karena Ω kontinu dan naik, maka $\lim\sup_{n\to\infty} \hat{v}_\lambda(x_{m_{i-1}}, x_{n_{i-1}}) \le \Omega(\epsilon_0)$. Di lain pihak, Berdasarkan Aksioma (iii) pada Definisi 1, diperoleh

$$\epsilon_0 \le \hat{v}_\lambda(x_{m_i}, x_{n_i}) \le \Omega\left(\hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x_{m_i}, x_{n_{i-1}}) + \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x_{n_{i-1}}, x_{n_i})\right).$$

Akibatnya, karena Ω kontinu dan naik, maka

$$\Omega^{-1}(\epsilon_0) \le \lim\sup_{n\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x_{m_i}, x_{n_{i-1}}).$$

Diperhatikan bahwa $\psi\left(\Omega(\hat{v}_\lambda(x_{m_i}, x_{n_i}))\right) \le \psi\left(M_\lambda(x_{m_{i-1}}, x_{n_{i-1}})\right) - \varphi\left(M_\lambda(x_{m_{i-1}}, x_{n_{i-1}})\right)$ dengan

$$M_\lambda(x_{m_{i-1}}, x_{n_{i-1}}) = \max\{\hat{v}_\lambda(x_{m_{i-1}}, x_{n_{i-1}}), \hat{v}_\lambda(x_{m_{i-1}}, x_{m_i}), \hat{v}_\lambda(x_{n_{i-1}}, x_{n_i}), \hat{v}_\lambda(x_{n_{i-1}}, x_{m_i})\}.$$

Selanjutnya, diperhatikan bahwa $\hat{v}_\lambda(x_{n_{i-1}}, x_{m_i}) < \epsilon_0 \le \Omega(\epsilon_0)$ maka

$$\lim\sup_{n\to\infty} \hat{v}_\lambda(x_{n_{i-1}}, x_{m_i}) \le \Omega(\epsilon_0)$$

sehingga

$$\lim\sup_{n\to\infty} M_\lambda(x_{m_{i-1}}, x_{n_{i-1}}) \le \Omega(\epsilon_0).$$

Di lain pihak, karena $\epsilon_0 \le \hat{v}_\lambda(x_{m_i}, x_{n_i}) \le \Omega\left(\hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x_{m_i}, x_{n_{i-1}}) + \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x_{n_{i-1}}, x_{n_i})\right)$, maka

$$\Omega^{-1}(\epsilon_0) \le \lim\inf_{n\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x_{m_i}, x_{n_{i-1}}).$$

Akibatnya, karena $\epsilon_0 \le \Omega(\epsilon_0) \le \Omega^2(\epsilon_0)$ dan Ω naik, maka

$$\lim\inf_{n\to\infty} M_\lambda(x_{m_{i-1}}, x_{n_{i-1}}) \ge \Omega^{-1}(\epsilon_0).$$

Karena Ω naik dan $\hat{v}_\lambda(x_{m_i}, x_{n_i}) \ge \epsilon_0$, maka $\Omega(\epsilon_0) \le \Omega\left(\hat{v}_\lambda(x_{m_i}, x_{n_i})\right)$. Selanjutnya, karena Ω kontinu, ψ dan φ naik dan kontinu, serta

$$\psi(\Omega(\epsilon_0)) \le \psi\left(\Omega\left(\hat{v}_\lambda(x_{m_i}, x_{n_i})\right)\right) \le \psi\left(M_\lambda(x_{m_{i-1}}, x_{n_{i-1}})\right) - \varphi\left(M_\lambda(x_{m_{i-1}}, x_{n_{i-1}})\right),$$

maka

$$\psi(\Omega(\epsilon_0)) \le \psi(\Omega(\epsilon_0)) - \varphi\left(\lim\inf_{n\to\infty} M_\lambda(x_{m_{i-1}}, x_{n_{i-1}})\right).$$

Dengan demikian, $\varphi\left(\lim\inf_{n\to\infty} M_\lambda(x_{m_{i-1}}, x_{n_{i-1}})\right) = 0$ sehingga

$$\lim\inf_{n\to\infty} M_\lambda(x_{m_{i-1}}, x_{n_{i-1}}) = 0.$$

Lebih lanjut, karena $\Omega^{-1}(\epsilon_0) \ge 0$, maka $\lim\inf_{n\to\infty} M_\lambda(x_{m_{i-1}}, x_{n_{i-1}}) = 0 \le \Omega^{-1}(\epsilon_0)$. Hal tersebut kontradiksi dengan $\lim\inf_{n\to\infty} M_\lambda(x_{m_{i-1}}, x_{n_{i-1}}) \ge \Omega^{-1}(\epsilon_0)$. Jadi, pengandaian salah. Dengan kata lain, $\{x_n\}$ merupakan barisan $\hat{v}_\lambda$-Cauchy di dalam X. Selanjutnya, karena X ruang $\hat{v}_\lambda$-lengkap, maka

$$\lim_{n\to\infty} \hat{v}_\lambda(x_n, u) = 0.$$

Akibatnya, karena $\hat{v}$ memenuhi kondisi-Δ_2, maka

$$\lim_{n\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(f(x_n), u) = \lim_{n\to\infty} \hat{v}_\lambda(x_{n+1}, u) = 0.$$

Selanjutnya, akan dibuktikan $f(u) = u$. Diperhatikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}_0$ berlaku

$$\hat{v}_\lambda(u, f(u)) \leq \Omega\left(\hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(u, f(x_n)) + \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(f(x_n), f(u))\right).$$

Karena Ω kontinu, maka

$$\hat{v}_\lambda(u, f(u)) \leq \Omega\left(\lim_{n\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(u, f(x_n)) + \lim_{n\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(f(x_n), f(u))\right) = \Omega\left(\lim_{n\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(f(x_n), f(u))\right).$$

Selanjutnya, akan dibuktikan $\lim_{n\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(f(x_n), f(u)) = 0$. Karena f kontinu pada X dan $\{x_n\}$ $\hat{v}_\lambda$-konvergen ke x, maka $\lim_{n\to\infty} \hat{v}_\lambda(f(x_n), f(u)) = 0$. Selanjutnya, karena $\hat{v}$ memenuhi kondisi-Δ_2, maka $\lim_{n\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(f(x_n), f(u)) = 0$ sehingga

$$\hat{v}_\lambda(u, f(u)) \leq \Omega\left(\lim_{n\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(f(x_n), f(u))\right) = \Omega(0) = 0.$$

Dengan demikian, diperoleh $\hat{v}_\lambda(u, f(u)) = 0$ atau $f(u) = u$. Dengan kata lain, u titik tetap f. ■

Selain teorema titik tetap di atas, terdapat teorema titik tetap lain yang menggunakan suatu sifat yang disebut sebagai ruang p-metrik modular yang mempunyai *sequential limit comparison property* (*s.l.c.p.*). Oleh karena itu, akan diberikan definisi ruang p-metrik modular yang mempunyai *s.l.c.p.*.

Definisi 14. Diberikan $\lambda > 0$. Ruang p-metrik modular berorder parsial $(X, \preceq, \hat{v})$ dikatakan mempunyai *s.l.c.p.* jika untuk setiap barisan naik $\{x_n\} \subseteq X$ yang $\hat{v}_\lambda$-konvergen ke $x \in X$ berakibat $x_n \preceq x$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Adapun teorema titik tetap untuk pemetaan $(\psi, \varphi)_{\Omega_\lambda}$-kontraksi pada ruang p-metrik modular yang berorder dan mempunyai *s.l.c.p* adalah sebagai berikut.

Teorema 15. Diberikan $\lambda > 0$, ruang p-metrik modular berorder $(X, \preceq, \hat{v})$ yang $\hat{v}_\lambda$-lengkap dan mempunyai *s.l.c.p.* dengan $\hat{v}$ memenuhi kondisi tipe-Δ_2, yaitu terdapat $K > 0$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ dan $\lambda > 0$ berlaku

$$\hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x, y) \leq K\, \hat{v}_\lambda(x, y)$$

dengan $K \leq 1$ serta $f: X \to X$ pemetaan (ψ, φ) Ω_λ-kontraksi berorder yang naik. Jika terdapat $x_0 \in X$ sehingga $x_0 \preceq f(x_0)$, maka f mempunyai titik tetap.

Bukti. Analog dengan pembuktian Teorema 13, dapat dibentuk barisan naik (monoton) $\{x_n\}$ di dalam X yang $\hat{v}_\lambda$-konvergen ke suatu $u \in X$. Karena X mempunyai *s.l.c.p*, maka $x_n \preceq u$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Selanjutnya, akan ditunjukkan $f(u) = u$.

Karena $f: X \to X$ pemetaan (ψ, φ) Ω_λ-kontraksi berorder, maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}_0$ berlaku

$$\psi\left(\Omega\left(\hat{v}_\lambda(x_{n+1}, f(u))\right)\right) = \psi\left(\Omega\left(\hat{v}_\lambda(f(x_n), f(u))\right)\right) \leq \psi(M_\lambda(x_n, u)) - \varphi(M_\lambda(x_n, u))$$

dengan $M_\lambda(x_n, u) = \max\{\hat{v}_\lambda(x_n, u), \hat{v}_\lambda(x_n, x_{n+1}), \hat{v}_\lambda(u, f(u)), \hat{v}_\lambda(u, x_{n+1})\}$. Akibatnya, diperoleh $\lim_{n\to\infty} M_\lambda(x_n, u) = \hat{v}_\lambda(u, f(u))$ sehingga

$$\liminf_{n\to\infty} M_\lambda(x_n, u) = \hat{v}_\lambda(u, f(u)) \text{ dan } \limsup_{n\to\infty} M_\lambda(x_n, u) = \hat{v}_\lambda(u, f(u)).$$

Karena $\hat{v}$ memenuhi kondisi Δ_2 maka

$$\lim_{n\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, u) = 0, \lim_{n\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, x_{n+1}) = 0, \text{dan} \lim_{n\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(u, x_{n+1}) = 0.$$

sehingga $\lim_{n\to\infty} M_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, u) = \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(u, f(u))$. Berdasarkan Teorema 4, karena $f(u) \in X$ dan $\{f(x_n) = x_{n+1}\}$ $\hat{v}_\lambda$-konvergen ke u, maka

$$\Omega^{-1}\left(\hat{v}_\lambda(u, f(u))\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(f(x_n), f(u))$$

dan

$$\limsup_{n\to\infty} \hat{v}_\lambda(f(x_n), f(u)) \leq \Omega\left(\hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(u, f(u))\right).$$

Diperhatikan bahwa $\{f(x_n) = x_{n+1}\}$ $\hat{v}_\lambda$-konvergen ke u, maka $\lim_{n\to\infty} \hat{v}_\lambda(f(x_n), u) = 0$. Akibatnya, karena $\hat{v}$ memenuhi kondisi tipe-Δ_2, maka $\hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(f(x_n), u) \leq K\hat{v}_\lambda(f(x_n), u)$ sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(f(x_n), u) \leq K \lim_{n\to\infty} \hat{v}_\lambda(f(x_n), u) = 0.$$

Dengan kata lain, $\{f(x_n)\}$ $\hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}$-konvergen ke u. Selanjutnya, berdasarkan Teorema 4, diperoleh

$$\limsup_{n\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(f(x_n), f(u)) \leq \Omega\left(\hat{v}_{\frac{\lambda}{4}}(u, f(u))\right).$$

Karena ψ, φ naik dan kontinu serta Ω kontinu, maka

$$\psi(\hat{v}_\lambda(u, f(u))) \leq \psi\left(\hat{v}_{\frac{\lambda}{4}}(u, f(u))\right) - \varphi\left(\limsup_{n\to\infty}\left(M_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, u)\right)\right).$$

Diperhatikan bahwa $\hat{v}$ memenuhi kondisi tipe-Δ_2 dengan $K \leq 1$ dan ψ naik, maka

$$\psi\left(\hat{v}_{\frac{\lambda}{4}}(u, f(u))\right) \leq \psi(\hat{v}_\lambda(u, f(u))) = \psi\left(\hat{v}_{\frac{\lambda}{4}}(u, f(u))\right) - \varphi\left(\limsup_{n\to\infty}\left(M_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, u)\right)\right).$$

Dengan demikian, $\varphi\left(\limsup_{n\to\infty} \varphi\left(M_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, u)\right)\right) = 0$ sehingga $\hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(u, f(u)) = 0$. Lebih lanjut, diperoleh $\hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(u, f(u)) = 0$ yang berakibat $f(u) = u$. Jadi, u titik tetap f. ■

Selanjutnya, akan diberikan beberapa akibat dari Teorema 13 dan Teorema 15 yang dinyatakan dalam teorema-teorema berikut. Adapun akibat dari Teorema 13 dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 16. Diberikan $\lambda > 0$, ruang p-metrik modular berorder parsial $(X, \preceq, \hat{v})$ yang $\hat{v}_\lambda$-lengkap, $f: X \to X$ pemetaan naik berorder, $\hat{v}$ memenuhi kondisi-Δ_2, dan terdapat $k \in [0,1)$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ yang comparable berlaku

$$\Omega\left(\hat{v}_\lambda(f(x), f(y))\right) \leq k \max\{\hat{v}_\lambda(x, y), \hat{v}_\lambda(x, f(x)), \hat{v}_\lambda(y, f(y)), \hat{v}_\lambda(y, f(y)), \hat{v}_\lambda(y, f(x))\}$$

serta terdapat $x_0 \in X$ sehingga $x_0 \preceq f(x_0)$. Jika $\Omega(0)$ dan f kontinu, maka f mempunyai titik tetap.

Bukti. Diambil $\psi(t) = t$ dan $\varphi(t) = (1-k)t$, untuk setiap $t \geq 0$, maka jelas bahwa ψ dan φ naik dan kontinu serta $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ dan $\psi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Selanjutnya, diperhatikan bahwa untuk setiap $x, y \in X$ berlaku

$$\begin{aligned}\Omega\left(\hat{v}_\lambda(f(x), f(y))\right) &\leq k \max\{\hat{v}_\lambda(x, y), \hat{v}_\lambda(x, f(x)), \hat{v}_\lambda(y, f(y)), \hat{v}_\lambda(y, f(y)), \hat{v}_\lambda(y, f(x))\}\\ &= k\, M_\lambda(x, y) = \psi(M_\lambda(x, y)) - \varphi(M_\lambda(x, y)).\end{aligned}$$

Dengan kata lain, f pemetaan (ψ, φ) Ω_λ-kontraksi berorder yang naik. Karena $\Omega(0) = 0$ dan f kontinu, maka menurut Teorema 13, f mempunyai titik tetap. ■

Selanjutnya, akibat dari Teorema 15 dinyatakan sebagai berikut.

Teorema 17. Diberikan $\lambda > 0$, ruang p-metrik modular berorder parsial $(X, \preceq, \hat{v})$ yang $\hat{v}_\lambda$-lengkap, $f: X \to X$ pemetaan naik berorder, $\hat{v}$ memenuhi kondisi tipe-Δ_2, yaitu terdapat $K > 0$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ dan $\lambda > 0$ berlaku

$$\hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x, y) \leq K\, \hat{v}_\lambda(x, y)$$

dengan $K \leq 1$ dan terdapat $k \in [0,1)$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ yang *comparable* berlaku

$$\Omega\left(\hat{v}_\lambda(f(x), f(y))\right) \leq k \max\{\hat{v}_\lambda(x, y), \hat{v}_\lambda(x, f(x)), \hat{v}_\lambda(y, f(y)), \hat{v}_\lambda(y, f(y)), \hat{v}_\lambda(y, f(x))\}$$

serta terdapat $x_0 \in X$ sehingga $x_0 \preceq f(x_0)$. Jika $(X, \preceq, \tilde{d})$ mempunyai *s.l.c.p,* maka f mempunyai titik tetap.

Bukti. Diambil $\psi(t) = t$ dan $\varphi(t) = (1-k)t$, untuk setiap $t \geq 0$, maka analog dengan pembuktian dalam Teorema 16, diperoleh f pemetaan $(\psi, \varphi)_{\Omega_\lambda}$-kontraksi berorder yang naik. Karena $(X, \preceq, \hat{v})$ mempunyai *s.l.c.p*, maka menurut Teorema 15, f mempunyai titik tetap. ■

Adapun akibat lain dari Teorema 13 dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 18. Diberikan $\lambda > 0$, ruang p-metrik modular berorder parsial $(X, \preceq, \hat{v})$ yang $\hat{v}_\lambda$-lengkap, $f: X \to X$ pemetaan naik berorder, $\hat{v}$ memenuhi kondisi-Δ_2, dan terdapat $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in [0,1)$ dengan $\alpha + \beta + \gamma + \delta \in [0,1)$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ yang comparable berlaku

$$\Omega\left(\hat{v}_\lambda\big(f(x), f(y)\big)\right) \le \alpha\, \hat{v}_\lambda(x,y) + \beta\, \hat{v}_\lambda\big(x, f(x)\big) + \gamma\, \hat{v}_\lambda\big(y, f(y)\big) + \delta\, \hat{v}_\lambda\big(y, f(x)\big)$$

serta terdapat $x_0 \in X$ sehingga $x_0 \preceq f(x_0)$. Jika $\Omega(0) = 0$ dan f kontinu, maka f mempunyai titik tetap.

Bukti. Diambil $\psi(t) = t$ dan $\varphi(t) = \big(1 - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\big)t$, untuk setiap $t \ge 0$, maka jelas bahwa ψ dan φ naik dan kontinu serta $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ dan $\psi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Selanjutnya, diperhatikan bahwa untuk setiap $x, y \in X$ berlaku

$$\begin{aligned}\Omega\left(\hat{v}_\lambda\big(f(x), f(y)\big)\right) &\le \alpha\, \hat{v}_\lambda(x,y) + \beta\, \hat{v}_\lambda\big(x, f(x)\big) + \gamma\, \hat{v}_\lambda\big(y, f(y)\big) + \delta\, \hat{v}_\lambda\big(y, f(x)\big)\\ &\le (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\, M_\lambda(x,y)\\ &= \psi\big(M_\lambda(x,y)\big) - \varphi\big(M_\lambda(x,y)\big).\end{aligned}$$

Dengan demikian, f pemetaan $(\psi, \varphi)_{\Omega_\lambda}$-kontraksi berorder yang naik. Karena $\Omega(0) = 0$ dan f kontinu, maka menurut Teorema 13, f mempunyai titik tetap. ■

Selanjutnya, akibat lain dari Teorema 15 dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 19. Diberikan $\lambda > 0$, ruang p-metrik modular berorder parsial $(X, \preceq, \hat{v})$ yang $\hat{v}_\lambda$-lengkap, $f: X \to X$ pemetaan naik berorder, $\hat{v}$ memenuhi kondisi tipe-Δ_2, yaitu terdapat $K > 0$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ dan $\lambda > 0$ berlaku

$$\hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x,y) \le K\, \hat{v}_\lambda(x,y)$$

dengan $K \le 1$, dan terdapat $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in [0,1)$ dengan $\alpha + \beta + \gamma + \delta \in [0,1)$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ yang *comparable* berlaku

$$\Omega\left(\hat{v}_\lambda\big(f(x), f(y)\big)\right) \le \alpha\, \hat{v}_\lambda(x,y) + \beta\, \hat{v}_\lambda\big(x, f(x)\big) + \gamma\, \hat{v}_\lambda\big(y, f(y)\big) + \delta\, \hat{v}_\lambda\big(y, f(x)\big)$$

serta terdapat $x_0 \in X$ sehingga $x_0 \preceq f(x_0)$. Jika $(X, \preceq, \hat{v})$ memenuhi *s.l.c.p*, maka f mempunyai titik tetap.

Bukti. Diambil $\psi(t) = t$ dan $\varphi(t) = \big(1 - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\big)t$, untuk setiap $t \ge 0$, maka analog dengan pembuktian dalam Teorema 18, diperoleh f pemetaan $(\psi, \varphi)_{\Omega_\lambda}$-kontraksi berorder yang naik. Karena $(X, \preceq, \hat{v})$ mempunyai *s.l.c.p*, maka menurut Teorema 15, f mempunyai titik tetap. ■

Secara umum terdapat berbagai jenis aplikasi teorema titik tetap. Salah satu aplikasi dari teorema titik tetap untuk pemetaan $(\psi, \varphi)_{\Omega_\lambda}$-kontraksi pada ruang p-metrik modular yang berorder, khususnya Teorema 15, adalah menjamin eksistensi solusi dari persamaan integral. Selanjutnya, akan diberikan teorema yang menjamin eksistensi suatu solusi persamaan integral yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 20. Diberikan $\lambda > 0$. Jika $X = C(I, \mathbb{R})$ = himpunan fungsi kontinu bernilai real pada $I = [0, T]$ dengan $T > 0$ dan order parsial $\preceq$ pada X dengan definisi

$$x \preceq y \Leftrightarrow x(t) \le y(t), \text{ untuk setiap } x, y \in X \text{ dan } t \in I.$$

serta fungsi $\hat{v}: (0, \infty) \times X \times X \to [0, \infty]$ dengan definisi $\hat{v}_\lambda(x,y) = e^{\frac{\left(\max_{t \in I}|x(t) - y(t)|\right)}{\lambda}} - 1$,untuk setiap $x, y \in X$ dan $\lambda > 0$, maka $(X, \preceq, \hat{v})$ merupakan ruang p-metrik modular yang berorder dengan $\Omega(t) = e^t - 1$, untuk setiap $t \ge 0$, yang $\hat{v}_\lambda$-lengkap dan mempunyai *s.l.c.p.*. Lebih lanjut, Jika

(i) $f: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinu,

(ii) $p: I \to \mathbb{R}$ kontinu,

(iii) $\theta: I \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ kontinu,

(iv) terdapat $k \in (0,1)$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ berlaku

$$0 \le e^{\frac{\left|\int_0^T \theta(t,r)\,[f(r,x(r)) - f(r,y(r))]\,dr\right|}{\lambda}} - 1 \le k\left[e^{\frac{(y(t) - x(t))}{\lambda}} - 1\right]$$

dan $\ln(1+t) - 2kt \ge 0$, untuk setiap $t \in I$,

(v) $\dfrac{\max_{t \in I} \int_0^T |\theta(t,r)|\,dr}{\lambda} \le 1$,

(vi) terdapat fungsi kontinu $\alpha: I \to \mathbb{R}$ sehingga

$$\alpha(t) \leq p(t) + \int_o^T \theta(t,r)\, f\big(r,\alpha(r)\big)\, dr, \text{ untuk setiap } t \in I,$$

maka persamaan integral $x(t) = p(t) + \int_0^T \theta(t,r)\, f\big(r,x(r)\big)\, dr$, $t \in I$ mempunyai solusi di dalam X.

Bukti. Dapat dibuktikan bahwa fungsi $\hat{v}$ merupakan p-metrik modular dengan $\Omega(t) = e^t - 1$, untuk setiap $t \geq 0$. Cukup jelas bahwa $(X,\preceq,\hat{v})$ merupakan ruang p-metrik modular yang beroder dan $\hat{v}_\lambda$-lengkap. Akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa $(X,\preceq,\hat{v})$ mempunyai *s.l.c.p*.

Diambil sebarang barisan monoton naik $(x_n) \subseteq C(I,\mathbb{R}) = X$ yang $\hat{v}_\lambda$-konvergen ke $x \in X$, akan dibuktikan bahwa diperoleh $x_n \preceq x$, untuk setiap $n \in N$. Karena (x_n) naik, maka untuk setiap $t \in I$ berlaku

$$x_1(t) \leq x_2(t) \leq x_3(t) \leq \cdots \leq x_n(t) \leq \cdots$$

Diperhatikan bahwa (x_n) $\hat{v}_\lambda$-konvergen ke x, maka berakibat untuk $n \to \infty$ berlaku

$$|x_n(t) - x(t)| \to 0, \text{ untuk setiap } t \in I.$$

Dengan demikian, untuk setiap $t \in I$, barisan $\big(x_n(t)\big)$ konvergen ke $x(t)$ di dalam $\mathbb{R}$.

Karena untuk setiap $t \in I$, barisan $\big(x_n(t)\big)$ naik, maka untuk setiap $t \in I, x(t)$ batas atas dari $\{x_n(t) \mid n \in \mathbb{N}\}$ sehingga untuk setiap $t \in I$ dan $n \in \mathbb{N}$ berlaku $x_n(t) \leq x(t)$. Jadi, diperoleh $x_n \preceq x$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dengan kata lain, benar bahwa $(X,\preceq,\hat{v})$ mempunyai *s.l.c.p.*. Selanjutnya, didefinsikan pemetaan $F\colon X \to X$ dengan

$$F\big(x(t)\big) = p(t) + \int_0^T \theta(t,r)\, f\big(r,x(r)\big)\, dr, \text{ untuk setiap } x \in X.$$

Diperhatikan bahwa untuk setiap $x,y \in X$ dengan $x \preceq y$

$$f(t,x) \leq f(t,y)$$

dan $\theta(t,r) > 0$, untuk setiap $t \in I$ berlaku

$$F\big(x(t)\big) = p(t) + \int_0^T \theta(t,r)\, f\big(r,x(r)\big)\, dr \leq p(t) + \int_0^T \theta(t,r)\, f\big(r,y(r)\big)\, dr = F\big(y(t)\big)$$

untuk setiap $t \in I$. Dengan demikian, F naik berorder. Selanjutnya, diambil $\psi(s) = \ln(1+s)$ dan $\varphi(s) = ks$, untuk setiap $s \geq 0$, maka untuk setiap $x,y \in X$ berlaku

$$\psi\left(\Omega\left(\hat{v}_\lambda\left(F\big(x(t)\big) - F\big(y(t)\big)\right)\right)\right) \leq k\left[e^{\frac{\max\limits_{t\in I}(y(t)-x(t))}{\lambda}} - 1\right] \leq k\, \hat{v}_\lambda(x,y).$$

Berdasarkan asumsi (iv), $\ln(1+t) - 2kt \geq 0$, untuk setiap $t \in I = [0,T]$ dengan $T > 0$, maka untuk setiap $x,y \in X$ berlaku

$$\ln\big(1 + M_\lambda(x,t)\big) - 2k\, M_\lambda(x,y) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(M_\lambda(x,y) + 1) - k\, M_\lambda(x,y) \geq k\, M_\lambda(x,y).$$

Akibatnya, untuk setiap $x,y \in X$ berlaku

$$\psi\left(\Omega\left(\hat{v}_\lambda\left(F\big(x(t)\big) - F\big(y(t)\big)\right)\right)\right) \leq k\, \hat{v}_\lambda(x,y) \leq \psi\big(M_\lambda(x,y)\big) - \varphi\big(M_\lambda(x,y)\big)$$

dengan

$$M_\lambda(x,y) = \max\big\{\hat{v}_\lambda(x,y), \hat{v}_\lambda\big(x,F(x)\big), \hat{v}_\lambda\big(y,F(y)\big), \hat{v}_\lambda\big(y,F(x)\big)\big\}.$$

Dengan demikian, F pemetaan $(\psi,\varphi)_{\Omega_\lambda}$-kontraksi naik berorder dan kontinu. Berdasarkan asumsi (vi) yang memenuhi α dan definisi F, diperoleh

$$\alpha(t) \leq p(t) + \int_0^T \lambda(t,r)\, f\big(r,\alpha(r)\big)\, dr = F\big(x(t)\big)$$

untuk setiap $t \in I$. Dengan demikian, diperoleh $\alpha \leq F(\alpha)$. Lebih lanjut, akan dibuktikan $\hat{v}$ memenuhi kondisi tipe-Δ_2 dengan $0 < K \leq 1$. Diambil $K = 1$, maka $K \leq 1$ dan untuk setiap $x,y \in X$ dan $\lambda > 0$ berlaku $\hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}(x,y) \leq K\hat{v}_\lambda(x,y)$. Dengan kata lain, $\hat{v}$ memenuhi kondisi tipe-Δ_2 dengan $K \leq 1$. Akibatnya, berdasarkan Teorema 15, F mempunyai titik tetap di dalam X, yaitu terdapat $x \in X$ sehingga $x = F(x)$. ■

Pada bagian ini, telah diberikan definisi pemetaan $(\psi,\varphi)_{\Omega_\lambda}$-kontraksi pada ruang p-metrik modular, teorema-teorema untuk pemetaan tersebut, dan suatu aplikasi dari salah satu teorema tersebut. Selanjutnya, akan diberikan pembahasan dari hasil penelitian yang telah diberikan.

PEMBAHASAN

Berdasarkan hasil penelitian tersebut, ditunjukkan bahwa pemetaan $(\psi,\varphi)_{\Omega}$-kontraksi di dalam ruang p-metrik dapat diperumum di dalam ruang p-metrik modular, yang selanjutnya disebut sebagai pemetaan $(\psi,\varphi)_{\Omega_\lambda}$-kontraksi. Dalam proses membuktikan teorema titik tetap untuk pemetaan $(\psi,\varphi)_{\Omega}$-kontraksi pada ruang p-metrik modular, dibutuhkan beberapa definisi maupun sifat yang merupakan perumuman baik dari ruang b-metrik, ruang p-metrik, ruang metrik modular maupun ruang b-metrik modular. Definisi barisan $\hat{v}_\lambda$-konvergen, barisan $\hat{v}_\lambda$-Cauchy, dan ruang p-metrik modular yang $\hat{v}_\lambda$-lengkap, untuk suatu $\lambda > 0$, di dalam ruang p-metrik modular merupakan perumuman dari definisi barisan konvergen, barisan Cauchy, ruang metrik modular lengkap di dalam ruang metrik modular yang diberikan oleh Chistyakov (2010). Selanjutnya, sifat barisan yang menyatakan bahwa jika $\{x_n\},\{y_n\} \subseteq X$ yang secara berturut-turut $\hat{v}_\lambda$-konvergen ke $x,y \in X$ di dalam ruang p-metrik modular $(X,\hat{v})$, maka $(\Omega^2)^{-1}\left(\hat{v}_\lambda(x,y)\right) \leq \lim\inf_{n\to\infty} \hat{v}_{\frac{\lambda}{4}}(x_n,y_n)$ dan $\lim\sup_{n\to\infty} \hat{v}_\lambda(x_n,y_n) \leq \Omega^2\left(\hat{v}_{\frac{\lambda}{4}}(x,y)\right)$ merupakan perumuman dari sifat dua barisan konvergen di dalam ruang b-metrik modular yang diberikan oleh Parvaneh, et al. (2019). Selain itu, diberikan definisi suatu p-metrik modular yang memenuhi kondisi-Δ_2 yang merupakan perumuman definisi suatu metrik modular yang memenuhi kondisi-Δ_2 di dalam metrik modular yang diberikan oleh Chistyakov (2015). Selanjutnya, diperikan pula definisi suatu p-metrik modular yang memenuhi kondisi tipe-Δ_2 yang merupakan perumuman definisi suatu metrik modular yang memenuhi kondisi tipe-Δ_2 di dalam metrik modular yang diberikan oleh Chaira et al. (2020). Berdasarkan kedua definisi tersebut, diperoleh bahwa setiap p-metrik modular yang memenuhi kondisi tipe-Δ_2 pasti memenuhi kondisi-Δ_2. Lebih lanjut, berdasarkan definisi suatu p-metrik modular yang memenuhi kondisi-Δ_2 tersebut, dapat dibuktikan bahwa jika $\hat{v}$ memenuhi kondisi-Δ_2, maka setiap barisan $\hat{v}_\lambda$-konvergen, untuk suatu $\lambda > 0$ merupakan barisan $\hat{v}_\lambda$-Cauchy dan setiap barisan $\hat{v}_\lambda$-Cauchy merupakan barisan $\hat{v}_{\frac{\lambda}{2}}$-Cauchy. Berdasarkan beberapa definisi dan sifat di atas, diperoleh teorema titik tetap untuk pemetaan $(\psi,\varphi)_{\Omega_\lambda}$-kontraksi pada ruang p-metrik modular yang pertama yang menyatakan bahwa untuk suatu $\lambda > 0$, pemetaan $(\psi,\varphi)_{\Omega_\lambda}$-kontraksi yang naik dan kontinu mempunyai titik tetap di dalam ruang p-metrik modular berorder $(X,\preceq,\hat{v})$ yang $\hat{v}_\lambda$-lengkap jika $\hat{v}$ memenuhi kondisi-Δ_2, $\Omega(0) = 0$, dan terdapat $x_0 \in X$ dengan sifat $x_0 \preceq f(x_0)$.

Selain, teorema titik tetap tersebut, terdapat teorema titik tetap yang lain yang membutuhkan suatu sifat ruang p-metrik modular yang mempunyai *sequential limit comparison property (s.l.c.p.)*. Definisi ruang p-metrik modular berorder yang mempunyai *s.l.c.p.* merupakan perumuman dari definisi ruang p-metrik berorder yang mempunyai *s.l.c.p.* yang diberikan oleh Parvaneh & Ghoncheh (2019). Adapun teorema titik tetap untuk pemetaan $(\psi,\varphi)_{\Omega_\lambda}$-kontraksi pada ruang p-metrik modular yang kedua yang menyatakan bahwa untuk suatu $\lambda > 0$, pemetaan $(\psi,\varphi)_{\Omega_\lambda}$-kontraksi yang naik mempunyai titik tetap di dalam ruang p-metrik modular berorder $(X,\preceq,\hat{v})$ yang $\hat{v}_\lambda$-lengkap dan mempunyai *s.l.c.p.* jika $\hat{v}$ memenuhi kondisi tipe-Δ_2 dengan $K \leq 1$ dan terdapat $x_0 \in X$ dengan sifat $x_0 \preceq f(x_0)$.

Beberapa akibat diperoleh dari teorema titik tetap baik yang pertama maupun kedua. Salah satu akibat dari teorema titik tetap yang pertama menyatakan bahwa untuk suatu $\lambda > 0$, pemetaan f yang naik mempunyai titik tetap di dalam ruang p-metrik modular berorder $(X,\preceq,\hat{v})$ yang $\hat{v}_\lambda$-lengkap jika $\hat{v}$ memenuhi kondisi-Δ_2, $\Omega(0) = 0$, terdapat $x_0 \in X$ dengan sifat $x_0 \preceq f(x_0)$, serta terdapat $k \in [0,1)$ sehingga untuk setiap $x,y \in X$ yang *comparable* berlaku

$$\Omega\left(\hat{v}_\lambda\left(f(x),f(y)\right)\right) \leq k \max\left\{\hat{v}_\lambda(x,y), \hat{v}_\lambda\left(x,f(x)\right), \hat{v}_\lambda\left(y,f(y)\right), \hat{v}_\lambda\left(y,f(y)\right), \hat{v}_\lambda\left(y,f(x)\right)\right\}.$$

Akibat lain dari teorema titik tetap yang pertama menyatakan bahwa untuk suatu $\lambda > 0$, pemetaan f yang naik mempunyai titik tetap di dalam ruang p-metrik modular berorder $(X,\preceq,\hat{v})$ yang $\hat{v}_\lambda$-lengkap jika $\hat{v}$ memenuhi kondisi-Δ_2, $\Omega(0) = 0$, terdapat $x_0 \in X$ dengan sifat $x_0 \preceq f(x_0)$, serta terdapat $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in [0,1)$ dengan $\alpha+\beta+\gamma+\delta \in [0,1)$ sehingga untuk setiap $x,y \in X$ yang *comparable* berlaku $\Omega\left(\hat{v}_\lambda\left(f(x),f(y)\right)\right) \leq \alpha\, \hat{v}_\lambda(x,y) + \beta\, \hat{v}_\lambda\left(x,f(x)\right) + \gamma\, \hat{v}_\lambda\left(y,f(y)\right) + \delta\, \hat{v}_\lambda\left(y,f(x)\right)$. Selanjutnya, serupa dengan akibat-akibat tersebut, dapat diberikan pula akibat dari teorema titik tetap yang kedua. Akibat pertama dari teorema titik tetap yang kedua menyatakan bahwa untuk suatu $\lambda > 0$, pemetaan f yang naik mempunyai titik tetap di dalam ruang p-metrik modular berorder $(X,\preceq,\hat{v})$ yang $\hat{v}_\lambda$-lengkap dan mempunyai *s.l.c.p.* jika $\hat{v}$

memenuhi kondisi tipe-Δ_2 dengan $K \leq 1$, terdapat $x_0 \in X$ dengan sifat $x_0 \preceq f(x_0)$, serta terdapat $k \in [0,1)$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ yang *comparable* berlaku

$$\Omega\left(\hat{v}_\lambda\big(f(x), f(y)\big)\right) \leq k \max\{\hat{v}_\lambda(x,y), \hat{v}_\lambda\big(x, f(x)\big), \hat{v}_\lambda\big(y, f(y)\big), \hat{v}_\lambda\big(y, f(y)\big), \hat{v}_\lambda\big(y, f(x)\big)\}.$$

Adapun akibat lain dari teorema titik tetap yang kedua menyatakan bahwa untuk suatu $\lambda > 0$, pemetaan f yang naik mempunyai titik tetap di dalam ruang p-metrik modular berorder $(X, \preceq, \hat{v})$ yang $\hat{v}_\lambda$-lengkap dan mempunyai *s.l.c.p.* jika $\hat{v}$ memenuhi kondisi tipe-Δ_2 dengan $K \leq 1$, terdapat $x_0 \in X$ dengan sifat $x_0 \preceq f(x_0)$, serta terdapat $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in [0,1)$ dengan $\alpha + \beta + \gamma + \delta \in [0,1)$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ yang *comparable* berlaku

$$\Omega\left(\hat{v}_\lambda\big(f(x), f(y)\big)\right) \leq \alpha\, \hat{v}_\lambda(x,y) + \beta\, \hat{v}_\lambda\big(x, f(x)\big) + \gamma\, \hat{v}_\lambda\big(y, f(y)\big) + \delta\, \hat{v}_\lambda\big(y, f(x)\big).$$

Salah satu aplikasi dari teorema titik tetap untuk pemetaan $(\psi, \varphi)_{\Omega_\lambda}$-kontraksi pada ruang p-metrik modular adalah untuk menunjukkan eksistensi solusi persamaan integral $x(t) = p(t) + \int_0^T \theta(\lambda, t, r)\, f\big(\lambda, r, x(r)\big)\, dr$, $t \in [0, T]$ dengan $T > 0$. Teorema yang menunjukkan eksistensi solusi persamaan integral tersebut menyatakan bahwa untuk suatu $\lambda > 0$, persamaan integral di atas mempunyai solusi di dalam ruang p-metrik modular berorder $(X, \preceq, \hat{v})$ yang $\hat{v}_\lambda$-lengkap dan mempunyai *s.l.c.p.* dengan $X = C(I, R) =$ himpunan fungsi kontinu bernilai real pada $I = [0, T]$ dengan $T > 0$ dan order parsial $\preceq$ pada X dengan definisi $x \preceq y \Leftrightarrow x(t) \leq y(t)$, untuk setiap $x, y \in X$ dan $t \in I$ serta fungsi $\hat{v}: (0, \infty) \times X \times X \to R^+$ dengan definisi $\hat{v}_\lambda(x,y) = e^{\frac{\left(\max_{t \in I}|x(t) - y(t)|\right)}{\lambda}} - 1$, untuk setiap $x, y \in X$ dan $\lambda > 0$ jika fungsi f, p, dan θ kontinu, terdapat $k \in (0,1)$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ berlaku $0 \leq e^{\frac{\left|\int_0^T \theta(t,r)\,[f(r,x(r)) - f(r,y(r))]\,dr\right|}{\lambda}} - 1 \leq k\left[e^{\frac{(y(t) - x(t))}{\lambda}} - 1\right]$ dan $\ln(1+t) - 2kt \geq 0$, untuk setiap $t \in I$, $\frac{\max_{t \in I} \int_0^T |\theta(t,r)|\, dr}{\lambda} \leq 1$, serta terdapat fungsi kontinu $\alpha: I \to R$ sehingga

$$\alpha(t) \leq p(t) + \int_o^T \theta(t,r)\, f\big(r, \alpha(r)\big)\, dr, \text{ untuk setiap } t \in I.$$

SIMPULAN

Berdasarkan hasil penilitian, diperoleh tiga kesimpulan. Pertama, dapat didefinisikan pemetaan $(\psi, \varphi)_\Omega$-kontraksi di dalam ruang p-metrik modular. Kedua, dapat diberikan dua teorema titik tetap untuk pemetaan $(\psi, \varphi)_\Omega$-kontraksi pada ruang p-metrik modular yang berorder. Terakhir, dapat diberikan salah satu aplikasi dari teorema titik tetap yang telah diberikan. Mengingat masih banyak jenis perumuman pemetaan kontraksi dan juga ruang selain ruang p-metrik modular, tidak menutup kemungkinan jenis-jenis perumuman pemetaan kontraksi tersebut dapat didefinisikan di jenis ruang yang lain serta dapat dikembangkan teorema titik tetapnya untuk pemetaan tersebut.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih kepada Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat (LPPM) Universitas Nahdlatul Ulama Purwokerto yang telah memberikan kontribusi penting pada pendanaan dan pelaksanaan penelitian serta penulisan artikel ini serta pihak-pihak lain yang membantu hingga terselesaikannya artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

Chaira, K., Eladraoui, A., & Kabil, M. (2020). Extensions of some fixed point theorems for weak-contraction mappings in partially ordered modular metric spaces. *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics, 51(7), 111-124.* https://doi.org/10.29252/ijmsi.15.1.111

Chistyakov, V. V. (2010). Modular metric spaces, I: Basic concepts. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications,72(1),1-14.* https://doi.org/10.1016/j.na.2009.04.057

Chistyakov, V. V. (2010). Modular metric spaces, II: Application to superposition operators. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications,72(1),15-30.* https://doi.org/10.1016/j.na.2009.04.018

Chistyakov, V. V. (2011). A fixed point theorem for contractions in modular metric spaces. https://arxiv.org/pdf/1112.5561.pdf

Chistyakov, V.V. (2015). *Metric Modular Spaces, Theory and Applications.* Springer.

Czerwik , S. (1993). Contractions mappings in b-metric spaces. *Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis, 1(1), 5-11.* http://dml.cz/dmlcz/120469

Ege, M.E., & Alaca, C. (2018). Some results for modular b-metric spaces and an application to system of linear equations. *Azerbaijan Journal of Mathematics, 8(1), 3-14.* https://www.azjm.org/volumes/0801/0801-1.pdf

Fréchet, M. (1906). Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 22 (1), 1–72.* doi:10.1007/BF03018603

Gholidahneh, A., Sedghi, S., Ege, O., Mitrovic, Z. D., & de la Sen, M. (2021). The Meir-Keeler type contractions in extended modular b-metric spaces with an application. *AIMS Mathematics*, 6(2): 1781-1799. doi: 10.3934/math.2021107

Goebel, K. & Kirk, W. A. (1990). *Topics in Metric Fixed Point Theory.* Cambrige University Press.

Harini, L.. (2019). Teorema titik tetap untuk pemetaan kannan pada ruang mertrik modular teritlak. *Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika, 11(2), 11-18.* https://doi.org/10.20884/1.jmp.2019.11.2.2269

Hayati, A. (2022). Some coincidence point theorems in modular spaces. *Mathline: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika,* Vol. 7 No.1, 91-109. https://doi.org/10.31943/mathline.v7i1.260

Hernadi, J. (2008). Metoda pembuktian dalam matematika. *Jurnal Pendidikan Matematika, 2(1).* https://repository.unsri.ac.id/23421/1/URUT_1_Hal_GANJIL_YULAN.pdf

Iqbal, M., Batool, A., Ege, O., & de la Sen, M. (2021). Fixed point of generalized weak contraction in b-metric spaces. *Journal of Function Spaces, 2021 (2042162), 4-8.* https://doi.org/10.1155/2021/2042162

Khan, M., Swaleh, M., & Sessa, S. (1984). Fixed point theorems by altering distances between the points. *Bulletin of the Australian Mathematical Society, 30*(1), 1-9. doi:10.1017/S0004972700001659

Kir, M., & Hükmi Kiziltunc. (2013). On some well known fixed point theorems in *b*-metric spaces.*Turkish Journal of Analysis and Number Theory, 1(1), 13-16.* doi:10.12691/tjant-1-1-4

Morales, J. R. & Rojas, E. (2012). Some fixed point theorems by altering distance functions. *Palestine Journal of Mathematics, 1(2), 110-116.* https://pjm.ppu.edu/sites/default/files/papers/paper_1_2_6.pdf

Musielak, J. (1983). *Orlicz Spaces and Modular Spaces.* Springer-Verlag.

Nieto, J.J. & Rodríguez-López, R. (2005). Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations. *Order* **22**, 223–239. https://doi.org/10.1007/s11083-005-9018-5

Parvaneh, V. & Hosseini Ghoncheh, S. (2019). Fixed points of (ψ, ϕ)Ω-contractive mappings in ordered *p*-metric spaces. *Global Analysis and Discrete Mathematics*, 4(1), 15-29. doi: 10.22128/gadm.2019.290.1019

Parvaneh, V., Hussain, N., Khorshidi, M., Mlaiki, N., & Aydi, H. (2019). Fixed point results for generalized f-contractions in modular *b*-metric spaces with applications. *Mathematics*, *7*(10), 887. https://doi.org/10.3390/math7100887

Parvaneh, V., Hussain, N., Kutbi, M. A., & Khorshidi, M. (2019). Some fixed point results in extended parametric *b*-metric spaces with application to integral equations. *Journal of Mathematical Analysis, 10(5), 14-33.* http://www.ilirias.com/jma/repository/docs/JMA10-5-2.pdf

Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis* (3rd ed.). McGraw-Hill, Inc.