



Model Klasik dan Model Fraksional untuk Dinamika Penyebaran Virus Covid-19 Berbasis Model Lotka-Volterra

Suparno^{1*}, Sri Wahyuni Jamal², Riski Safitri³

¹Alumni Departemen Matematika, Universitas Gadjah Mada, Indonesia

²Fakultas Ekonomi Bisnis dan Politik, Universitas Muhammadiyah Kalimantan Timur, Indonesia

³Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Yogyakarta, Indonesia

* Corresponding Author. E-mail: soeparno.daga@gmail.com

ARTICLE INFO

Article History:

Received: 21-Jul. 2024

Revised: 08-Oct. 2024

Accepted: 11-Nov.2024

Keywords:

Covid-19,
Lotka-Volterra,
model turunan fraksional,
model
turunan klasik,
stabilitas Matignon

ABSTRACT

Covid-19 telah menjadi pandemi global sejak pertama kali muncul pada akhir tahun 2019. Pandemi ini ditandai dengan penyebarannya yang cepat dan gejalanya yang tidak muncul dengan cepat. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis dinamika penyebaran virus Covid-19 menggunakan pendekatan model Lotka-Volterra. Model yang diusulkan melibatkan model turunan klasik yang memuat order bilangan bulat dan model turunan fraksional dengan order fraksional. Model matematika yang terbentuk memiliki dua titik ekuilibrium yang berbeda: titik ekuilibrium trivial dan titik ekuilibrium tak nol. Untuk model klasik, kestabilan titik ekuilibrium trivial adalah *saddle*, sedangkan titik ekuilibrium tak nol bersifat stabil asimptotik lokal. Selanjutnya, stabilitas lokal untuk model fraksional juga dibahas berdasarkan kondisi stabilitas Matignon. Karena melibatkan efek memori, model turunan fraksional memberikan gambaran yang lebih memadai dan realistis mengenai fenomena alam yang timbul dari model tersebut. Selain itu, hasil numerik menunjukkan bahwa parameter fraksional berpengaruh terhadap dinamika penyebaran Covid-19. Hasil ini mungkin dapat digunakan sebagai sebuah strategi bagi para pemangku jabatan dalam mengendalikan penyebaran pandemi.

Covid-19 has become a global pandemic since it first appeared at the end of 2019. This pandemic is characterized by its rapid spread and symptoms that do not appear quickly. This research aims to analyze the dynamics of the spread of the Covid-19 virus using the Lotka-Volterra model approach. The proposed model involves a classical derivative model containing integer order and a fractional derivative model with fractional order. The mathematical model formed has two different equilibrium points: the trivial and the coexistence equilibrium point. For the classical model, the stability of the trivial equilibrium point is saddle, while the nonzero equilibrium point is locally asymptotically stable. Furthermore, local stability for the fractional model is also discussed based on the Matignon stability conditions. Because they involve memory effects, fractional derivative models provide a more adequate and realistic description of the natural phenomena that arise from these models. In addition, the numerical results show that fractional parameters influence the dynamics of the spread of Covid-19. These results may be used as a strategy for officials in controlling the spread of the pandemic.



This is an open access article under the [CC-BY-SA](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) license



How to Cite:

Suparno, S., Jamal, S. W., & Safitri, R. Model Klasik dan Model Fraksional untuk Dinamika Penyebaran Virus Covid-19 Berbasis Model Lotka-Volterra. *Pythagoras: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 19 (2), 92-101. <https://doi.org/10.21831/pythagoras.v19i2.76358>

<https://doi.org/10.21831/pythagoras.v19i2.76358>

PENDAHULUAN

Pandemi Covid-19 pertama kali ditemukan di Kota Wuhan pada bulan Desember 2019. Pada tanggal 7 Januari, wabah virus Corona (Covid-2019), yang diberi nama sebagai *severe acute respiratory syndrome coronavirus 2* (SARS-CoV-2) oleh *International Committee on Taxonomy of Viruses* pada tanggal 11 Februari 2020, diidentifikasi sebagai virus yang dapat menyebabkan kematian oleh otoritas Tiongkok (WHO, 2024). Hal ini mendorong

Organisasi Kesehatan Dunia (WHO) untuk menetapkan penyebaran infeksi virus yang mematikan tersebut sebagai sebuah keadaan darurat kesehatan masyarakat internasional pada bulan Maret 2020. Pandemi ini ditandai dengan penyebarannya yang cepat dan gejalanya yang tidak muncul dengan cepat. Secara khusus, menurut WHO, masa inkubasinya berkisar antara 2 hari hingga 14 hari (WHO, 2024). Selain itu, belum ada obat anti-virus atau vaksinasi yang secara resmi disetujui untuk pengelolaan atau pencegahan pandemi ini pada saat itu. Untuk melawan wabah ini, pengambil keputusan dan kebijakan kesehatan harus memutuskan dan mengikuti strategi dan tindakan yang diambil oleh manajemen layanan kesehatan.

Berdasarkan klasifikasi Baltimore, virus diklasifikasikan secara fenotip menurut jenis asam nukleat yang dimilikinya menjadi tujuh kelompok termasuk virus untai ganda dan virus untai tunggal. Virus Covid-19 merupakan virus RNA untai tunggal positif (Kuniya & Nakata, 2012). Fakta ini mengindikasikan bahwa Covid-19 memiliki rangkaian asam nukleat yang sangat terpelihara melalui seleksi alam sehingga memiliki tingkat mutasi yang tinggi. Oleh karena itu, virus ini merupakan salah satu penyakit infeksi virus paling berbahaya dan mematikan di dunia, di mana sudah banyak orang yang meninggal karenanya.

Berbagai penelitian yang melibatkan model matematika dalam menganalisis dinamika dan evolusi pandemi Covid-19 telah banyak diterbitkan (Carcione et al., 2020; Hernandez-Vargas & Velasco-Hernandez, 2020; Wu & McGoogan, 2020; Zhu et al., 2020). Berdasarkan pengalaman medis dan beberapa artikel terbaru, mengetahui data orang yang terinfeksi dalam suatu populasi akan sangat berguna untuk mendapatkan model yang lebih baik mengenai kapan penyakit akan mencapai puncak dan kemudian menurun. Selain itu, mengetahui data jumlah orang yang sembuh dari serangan virus adalah juga sangat penting, karena data-data tersebut menunjukkan sebuah fakta bagaimana kita dapat membangun kekebalan terhadap virus.

Model matematika memainkan peran penting untuk memahami penyebaran virus Covid-19 dan merancang strategi untuk membendung penyebarannya dengan cepat karena kurangnya antivirus atau vaksin yang efektif. Beberapa model matematika telah dikembangkan untuk mempelajari dinamika penularan pandemi Covid-19. Model jaringan *Bats-Hosts-Reservoir-People* telah dikembangkan oleh (Chen et al., 2020) untuk mempelajari dinamika transmisi virus corona baru. Lin et al. (2020) memperluas model kompartemen SEIR (*Susceptible-Exposed-Infectious-Removed*) untuk mempelajari dinamika Covid-19 dengan menggabungkan persepsi masyarakat mengenai risiko dan jumlah kasus kumulatif. Jayatilaka et al. (2022) mempelajari model SIR dengan menggunakan pendekatan kompartemen yang mencakup perilaku penularan yang dinamis dan tak linier melalui tiga faktor: *susceptible, infected dan removed* (sembuh dan meninggal). Selain itu, peneliti lainnya menganalisis model SEIR untuk menyelidiki dinamika penularan 2019-nCoV dari manusia ke manusia berdasarkan data dari Wuhan, Tiongkok dari 31 Desember 2019 hingga 28 Januari 2020 (Wu & McGoogan, 2020).

Selain model matematika yang melibatkan sistem persamaan diferensial klasik, kita juga dapat menggunakan model matematika yang melibatkan sistem persamaan diferensial dengan order fraksional. Kalkulus fraksional telah menjadi alat utama untuk memodelkan berbagai fenomena di bidang fisika, teknik, dan biologi (Al-Khedhairi et al., 2018; Elsadany & Matouk, 2015; Matouk, 2009; Matouk et al., 2015; Matouk & Elsadany, 2016). Kalkulus fraksional juga memiliki alat yang efektif untuk mendeskripsikan model epidemiologi karena memberikan lebih banyak kemungkinan dalam memprediksi perilaku suatu model. Selain itu, model fraksional melibatkan efek memori, efek yang penting dalam menggambarkan perilaku suatu model, telah banyak dipakai di berbagai bidang, misalnya di bidang epidemiologi dan ekonomi (Fatmawati et al., 2018, 2019; Jamal, Suparno, Fauziah, et al., 2024; Jamal, Suparno, Rashid, et al., 2024). Di bidang epidemiologi, model SEIR yang diperluas dengan order fraksional dianalisis oleh Khan dan Atangana untuk menggambarkan dinamika wabah Covid-19 di Wuhan, Tiongkok, di mana penulis menghitung nilai reproduksi dasarnya (Khan & Atangana, 2020).

Dalam penelitian ini, kami mencoba menganalisis dinamika penyebaran virus Covid-19 berbasis Lotka-Volterra (Lotka, 1925; Volterra, 1926) dengan order bilangan bulat dan order fraksional. Penelitian ini merupakan sebuah pengembangan dari penelitian sebelumnya, yang mengasumsikan bahwa laju pertumbuhan intrinsik populasi terinfeksi berupa fungsi ekponensial (Mohammed et al., 2021). Berbeda dengan penelitian tersebut, kebaruan dari penelitian ini adalah bahwa kami mengasumsikan laju pertumbuhan intrinsik populasi terinfeksi berupa fungsi logistik (Jamal, Suparno, Hadiyanti, et al., 2024). Hal ini lebih realistis karena jumlah populasi terinfeksi bergantung pada jumlah populasi sehat. Selanjutnya, kami membahas keberadaan dan keterbatasan solusi non-negatif dari model klasik. Kami juga mempelajari kondisi stabilitas titik keseimbangan model berdasarkan pertidaksamaan Matignon (Goel et al., 1971) dan menunjukkan pengaruh parameter fraksional terhadap dinamika perilaku model.

Meskipun saat ini pandemi Covid-19 telah dapat dikendalikan secara global, penelitian ini penting dan relevan untuk dilakukan karena memberikan gambaran cukup lengkap terkait bagaimana pengendalian pandemi virus jenis lainnya (baik mutasi Covid-19, maupun virus jenis lain) jika terjadi di masa depan. Dengan demikian, hasil utama yang diharapkan dalam penelitian ini adalah (1) memberikan informasi terkait evolusi perilaku penyebaran virus Covid-19 secara lengkap melalui analisis model matematika; dan (2) memberikan rekomendasi kepada para pemangku jabatan tentang bagaimana mengambil langkah taktis dalam mengendalikan pandemi di masa mendatang.

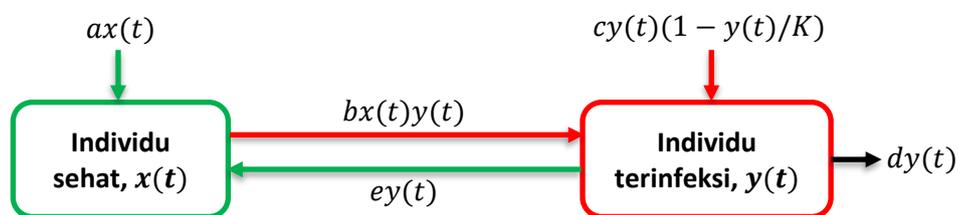
Kontribusi utama dari penelitian ini adalah: (1) membentuk sebuah model perilaku dinamis Covid-19; (2) mempelajari sifat kualitatif model tersebut; (3) menganalisis stabilitas titik keseimbangan model klasik dan model fraksionalnya; dan (4) membuktikan secara teoritis dan simulasi numerik pengaruh order fraksional terhadap perilaku model. Selanjutnya, susunan penyajian penelitian ini adalah sebagai berikut. Bagian 1 memuat pendahuluan. Bagian 2 menyajikan metode penelitian. Bagian 3 dikhususkan untuk analisis model: keterbatasan solusi, titik ekuilibrium, dan kestabilan model. Bagian 4, dengan menggunakan aplikasi Matlab, memuat hasil simulasi numerik dan interpretasinya. Bagian 5 berisi tentang kesimpulan dari hasil penelitian, rekomendasi, dan saran penelitian selanjutnya.

METODE

Penelitian ini menggunakan pendekatan model matematika. Model matematika tersebut memuat dua variabel yang bergantung waktu dan beberapa parameter model. Secara umum, langkah-langkah untuk memecahkan masalah dalam penelitian ini dibagi ke dalam lima tahap: (1) membuat skema dan membentuk model matematika yang menggambarkan dinamika penyebaran pandemi Covid-19 dengan melibatkan model Lotka-Volterra; (2) melakukan uji keterbatasan solusi dari model yang dihasilkan; (3) menghitung titik ekuilibriumnya; (4) menentukan nilai eigen dan sifat kestabilan lokal untuk setiap titik ekuilibrium baik model klasik maupun model fraksional; dan (5) melakukan simulasi numerik menggunakan aplikasi Matlab untuk kasus model klasik dan model fraksional.

Model matematika yang akan kita bahas dalam penelitian ini terinspirasi dari model klasik Lotka-Volterra (Lotka, 1925; Volterra, 1926). Model ini kemudian dikembangkan oleh Mohammed *et al.* dengan melibatkan order fraksional untuk melihat dinamika penyebaran virus Covid-19 (Mohammed *et al.*, 2021). Di sini, kita berasumsi bahwa virus berperan sebagai predator yang dapat menjangkiti individu sehat. Selanjutnya, populasi individu yang sehat disimbolkan sebagai $x(t)$ pada waktu t . Populasi $x(t)$ tumbuh secara eksponensial. Populasi individu yang terinfeksi disimbolkan sebagai $y(t)$ pada waktu t . Populasi individu yang terinfeksi tumbuh secara logistik, karena sepenuhnya bergantung pada populasi individu sehat. Misalkan $b > 0$ adalah laju infeksi virus, tingkat imigrasi individu yang sehat dinyatakan dengan $a > 0$, $c > 0$ adalah tingkat imigrasi individu yang terinfeksi, dan K adalah *carrying capacity*. Terakhir, tingkat kematian direpresentasikan oleh $d > 0$ dan tingkat kesembuhan direpresentasikan oleh $e > 0$.

Berdasarkan asumsi di atas, kita dapat membentuk diagram transfer model matematika penyebaran virus Covid-19 berbasis model klasik Lotka-Volterra sebagai berikut.



Gambar 1. Diagram transfer penyebaran virus Covid-19 berbasis model Lotka-Volterra

Berdasarkan diagram transfer pada gambar 1, kita dapat merumuskan model matematika klasik penularan virus Covid-19 berbasis model Lotka-Volterra adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= ax(t) - bx(t)y(t) + ey(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= cy(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K} \right) + bx(t)y(t) - (d + e)y(t), \end{aligned} \tag{1}$$

di mana $(x(t), y(t)) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}_+^2$ dan parameter $a, b, c, d, e, K \in \mathbb{R}_+$.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Model klasik penyebaran virus Covid-19 berbasis model Lotka-Volterra

Teorema 1. Solusi non-negatif dari Sistem (1) yang berada dalam ruang $\Omega \subseteq \mathbb{R}_+^2$ merupakan solusi yang terbatas.

Bukti. Diketahui bahwa $N(t) = x(t) + y(t)$. Berdasarkan Sistem (1), kita peroleh

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= \frac{dx(t)}{dt} + \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dN(t)}{dt} &= ax(t) - bx(t)y(t) + ey(t) + cy(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) + bx(t)y(t) - (d + e)y(t) \\ \frac{dN(t)}{dt} &< ax(t) + cy(t) \\ \frac{dN(t)}{dt} &\leq f(x(t) + y(t)) = fN(t), \text{ di mana } f = \max\{a, c\}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, kita peroleh $N(t) \leq N_0 e^{ft}$. Dengan demikian, terbukti bahwa solusi non-negatif dari Sistem (1) terbatas.

Sistem (1) memiliki dua titik ekuilibrium positif yang berbeda: titik ekuilibrium trivial dan ekuilibrium tak nol. Kedua titik ekuilibrium tersebut adalah sebagai berikut.

$E_0 = (0,0)$; dan $E_1 = (x^*, y^*)$, di mana $x^* = \frac{d+e-c}{b} - \frac{bcy^*}{Kb^2}$ dan $y^* = 0.5(ac + \sqrt{K^2 b^2 c^2 - 2K^2 b^2 cd + K^2 b^2 d^2 - 2Kabc^2 + 2Kabcd + 4eKabc + a^2 c^2 + Kbc - Kbd})/(bc)$, dengan $c < d$. Untuk mengetahui kestabilan kedua titik ekuilibrium, kita perlu menghitung matriks Jacobian dari Sistem (1).

$$J = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

di mana, $A = a - by(t)$, $B = -bx(t) + e$, $C = by(t)$, dan $D = c - \frac{2cy(t)}{K} + bx(t) - (d + e)$.

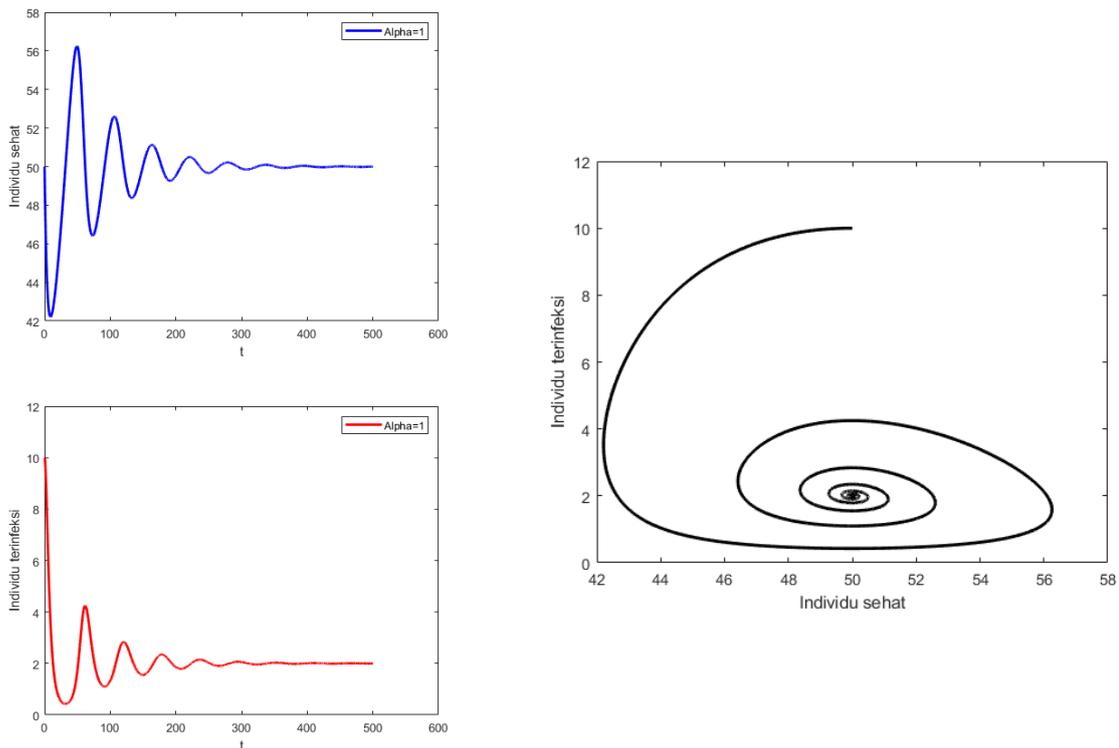
Dengan menghitung nilai eigen dari matriks Jacobian pada masing-masing titik ekuilibrium, maka untuk titik ekuilibrium $E_0 = (0,0)$, nilai eigen $\lambda_1 = a$ dan $\lambda_2 = c - (d + e)$. Karena $c < d$, titik ekuilibrium $E_0 = (0,0)$ berupa saddle. Untuk titik ekuilibrium $E_1 = (x^*, y^*)$, kita peroleh

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda - A^* & -B^* \\ -C^* & \lambda - D^* \end{vmatrix} &= 0, \\ \lambda^2 - (A^* + D^*)\lambda + AD^* - B^*C^* &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Dengan demikian, solusi dari Persamaan (2) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{(A^* + D^*) + \sqrt{(A^* + D^*)^2 - 4(A^*D^* - B^*C^*)}}{2}, \\ \lambda_2 &= \frac{(A^* + D^*) - \sqrt{(A^* + D^*)^2 - 4(A^*D^* - B^*C^*)}}{2}. \end{aligned}$$

Jika $(A^* + D^*) > 0$ dan $(A^* + D^*)^2 - 4(A^*D^* - B^*C^*) > 0$, maka nilai eigen λ_1 dan λ_2 masing-masing bernilai positif. Oleh karena itu, titik ekuilibrium E_1 tidak stabil. Namun, jika $(A^* + D^*) < 0$ dan $(A^* + D^*)^2 - 4(A^*D^* - B^*C^*) < 0$, maka nilai eigen λ_1 dan λ_2 masing-masing berupa bilangan kompleks, dengan bagian riil bernilai negatif. Oleh karena itu, titik ekuilibrium E_1 bersifat stabil asimptotik lokal (lihat Gambar 2).



Gambar 2. Trajektori dan potret fase Sistem (1) di mana $a = 0.12, b = 0.02, c = 0.0001, d = 0.3, e = 0.7$, dan $K = 36000000$ dengan nilai awal $(x_0, y_0) = (50, 10)$

Hasil simulasi numerik pada Gambar 2 menggambarkan dinamika perilaku penyebaran pandemi dan juga sifat kestabilan Sistem (1) di sekitar titik ekuilibrium tak nol. Dengan menggunakan nilai parameter model $a = 0.12, b = 0.02, c = 0.0001, d = 0.3, e = 0.7$, dan $K = 36000000$, kita peroleh titik ekuilibrium $E_1 = (50.01, 2.05)$. Berdasarkan gambaran trajektori, individu terinfeksi virus Covid-19 akan selalu ada. Hal ini menunjukkan bahwa virus Covid-19 tidak akan hilang sepenuhnya, namun dapat dikendalikan dalam jangka waktu $t = 500$. Selanjutnya, dengan mengambil nilai awal $(x_0, y_0) = (50, 10)$, potret fase pada Gambar 2 menunjukkan bahwa Sistem (1) konvergen ke titik ekuilibriumnya. Oleh karena itu, sifat kestabilan titik ekuilibrium E_1 adalah stabil asimptotik lokal.

Model fraksional penyebaran virus Covid-19 berbasis model Lotka-Volterra

Pada bagian ini, kami menggunakan operator turunan fraksional Caputo. Definisi turunan fraksional Caputo adalah sebagai berikut (Matignon, 1996; Podlubny, 1999).

$$D^\alpha \varepsilon(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma - q)} \int_0^t (t - \eta)^{\sigma - q - 1} \varepsilon^\sigma(\eta) d\eta, \alpha > 0, \sigma \in \mathbb{Z}^+, \alpha \in (\sigma - 1, \sigma). \tag{3}$$

Selanjutnya, kita mengganti order turunan bilangan bulat dengan operator fraksional ke dalam Sistem (1), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} D^\alpha x(t) &= ax(t) - bx(t)y(t) + ey(t), \\ D^\alpha y(t) &= cy(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) + bx(t)y(t) - (d + e)y(t), \quad 0 < \alpha \leq 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Untuk pembahasan selanjutnya, kita menentukan sifat kestabilan kedua titik ekuilibrium dengan menggunakan kriteria kestabilan Matignon (Goel et al., 1971). Berdasarkan teori stabilitas Matignon, titik keseimbangan model linearisasi (4) bersifat stabil asimptotik lokal jika semua nilai eigen $\lambda_i, i = 1, 2$, dari matriks J memenuhi pertidaksamaan berikut:

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}, i = 1, 2. \tag{5}$$

Jika terdapat salah satu nilai eigen yang tidak memenuhi kriteria Matignon pada (5), maka titik ekuilibrium tersebut bersifat tidak stabil asimptotik lokal.

Teorema 2. Titik ekuilibrium E_0 pada Sistem (4) tidak stabil, tetapi saddle jika $c < d$.

Bukti. Untuk titik ekuilibrium E_0 , nilai eigen yang bersesuaian adalah $\lambda_1 = a > 0$ dan $\lambda_2 = c - (d + e)$. Hal ini menunjukkan bahwa $|\arg(\lambda_1)| = 0 < \frac{\alpha\pi}{2}$, sehingga E_0 tidak stabil. Namun, jika $c < d$, maka $|\arg(\lambda_2)| = \pi$. Hal ini menunjukkan bahwa titik ekuilibrium E_0 adalah saddle.

Teorema 3. Titik ekuilibrium E_1 pada Sistem (4) bersifat stabil asimptotik lokal jika $(A^* + D^*) < 0$ dan $(A^* + D^*)^2 - 4(A^*D^* - B^*C^*) < 0$.

Bukti. Untuk titik ekuilibrium tak nol E_1 , nilai eigen yang bersesuaian adalah $\lambda_{1,2} = \left((A^* + D^*) \pm \sqrt{(A^* + D^*)^2 - 4(A^*D^* - B^*C^*)} \right) / 2$. Karena $(A^* + D^*) < 0$ dan $(A^* + D^*)^2 - 4(A^*D^* - B^*C^*) < 0$, nilai eigen $\lambda_{1,2}$ memiliki bagian riil negatif, di mana hal ini menunjukkan bahwa $|\arg(\lambda_1)| = \left| \arctan \left(-\frac{\sqrt{4(A^*D^* - B^*C^*) - (A^* + D^*)^2}}{(A^* + D^*)} \right) + \pi \right| > \frac{\alpha\pi}{2}$, dan $|\arg(\lambda_2)| = \left| \arctan \left(\frac{\sqrt{4(A^*D^* - B^*C^*) - (A^* + D^*)^2}}{(A^* + D^*)} \right) - \pi \right| > \frac{\alpha\pi}{2}$. Oleh karena itu, terbukti bahwa titik ekuilibrium E_1 pada Sistem (4) bersifat stabil asimptotik lokal.

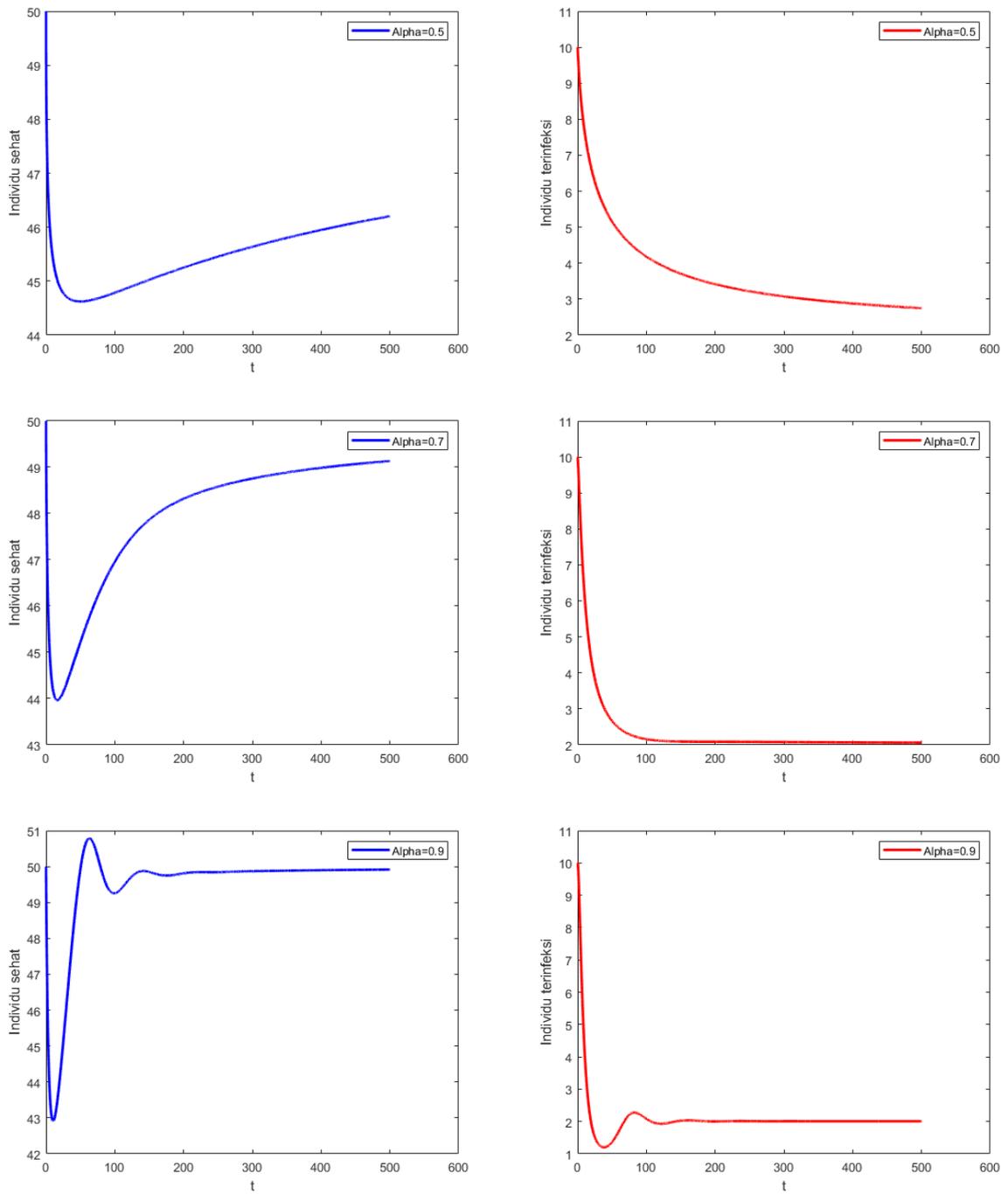
SIMULASI NUMERIK

Misalkan nilai masing-masing parameter model di atas adalah $a = 0.12, b = 0.02, c = 0.0001, d = 0.3$ dan $e = 0.7$, sedangkan $K = 36000000$. Dengan demikian, kita peroleh titik ekuilibrium $E_0 = (0,0)$ dan $E_1 = (49.995, 2.0004)$. Dengan menghitung nilai eigen dari matriks Jacobian pada masing-masing titik ekuilibrium, maka untuk titik ekuilibrium $E_0 = (0,0)$, nilai eigen $\lambda_1 = 0.12$ dan $\lambda_2 = -0.99999$. Untuk titik ekuilibrium $E_1 = (x^*, y^*)$, nilai eigen $\lambda_1 = -0.014 + 0.1086i$ dan $\lambda_2 = -0.014 - 0.1086i$. Berdasarkan Teorema 2 dan 3, titik ekuilibrium E_0 adalah saddle, sedangkan titik ekuilibrium E_1 bersifat stabil asimptotik lokal.

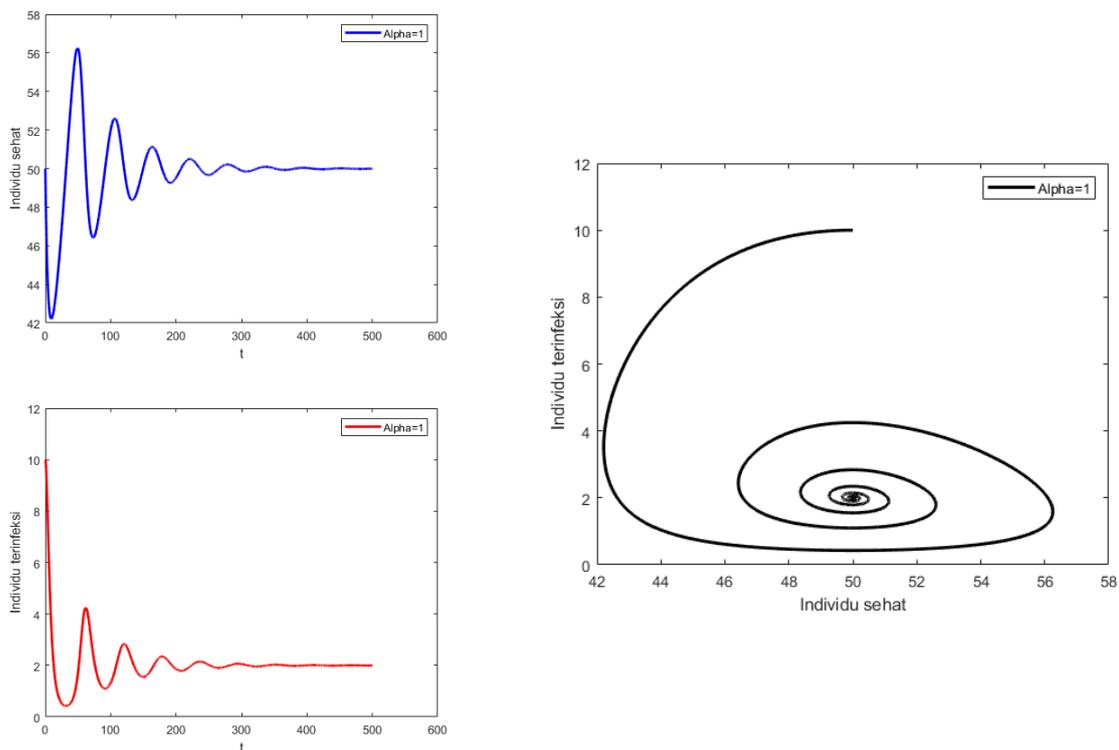
Hasil simulasi numerik pada Gambar 3 menggambarkan dinamika perilaku penyebaran pandemi dengan melibatkan nilai order fraksional yang berbeda. Berdasarkan gambaran trajektori, individu terinfeksi virus Covid-19 akan selalu ada. Hal ini menunjukkan bahwa virus Covid-19 tidak akan hilang sepenuhnya, namun dapat dikendalikan dalam jangka waktu tertentu. Untuk nilai order fraksional $\alpha = 0.5$, dinamika penyebaran pandemi tidak mengalami fluktuasi dan untuk $\alpha = 0.7$, dinamika penyebaran pandemi juga menunjukkan perilaku yang sama. Namun, perilaku sistem mulai memberikan fenomena yang berbeda dengan menunjukkan adanya fluktuasi ketika $\alpha = 0.9$.

Selanjutnya, dengan mengambil nilai awal $(x_0, y_0) = (50, 10)$ dengan order fraksional $\alpha = 1$, potret fase pada Gambar 4 menunjukkan bahwa Sistem (4) konvergen ke titik ekuilibriumnya. Oleh karena itu, sifat kestabilan titik ekuilibrium E_1 adalah stabil asimptotik lokal.

Gambar 4 menunjukkan dinamika perilaku penyebaran pandemi dan juga sifat kestabilan Sistem (4) di sekitar titik ekuilibrium tak nol dengan melibatkan nilai order fraksional $\alpha = 1$. Berdasarkan gambaran trajektori dan sifat kestabilan tersebut, dinamika perilaku dan kestabilan Sistem (4) sama dengan dinamika perilaku dan kestabilan pada Sistem (1) (lihat Gambar 2).



Gambar 3. Trajektori Sistem (4) dengan parameter fraksional α yang berbeda, $a = 0.12, b = 0.02, c = 0.0001, d = 0.3, e = 0.7, K = 36000000$ dan nilai awal $(x_0, y_0) = (50, 10)$



Gambar 4. Trajektori dan potret fase Sistem (4) dengan parameter fraksional $\alpha = 1$, $a = 0.12$, $b = 0.02$, $c = 0.0001$, $d = 0.3$, $e = 0.7$, $K = 36000000$ dan nilai awal $(x_0, y_0) = (50, 10)$

Berdasarkan uraian di atas, hasil simulasi numerik dengan melibatkan nilai order fraksional α yang berbeda menunjukkan bahwa Sistem (4) konvergen ke titik ekuilibrium tak nol lebih lengkap daripada model klasik dengan order bilangan bulat. Pada kasus klasik, model yang dihasilkan hanya dapat menjelaskan dinamika perilaku sistem dengan order $\alpha = 1$ (lihat Gambar 2), sedangkan pada kasus fraksional yang melibatkan order $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.7$, $\alpha = 0.9$, dan $\alpha = 1$, model yang dihasilkan memberikan hasil analisis yang lebih lengkap dalam menjelaskan dinamika perilaku sistem. Fenomena yang dihasilkan oleh order fraksional ini disebut sebagai efek memori (*memory effect*). Dapat dilihat dengan jelas bahwa efek memori yang dihasilkan oleh order fraksional $\alpha = 0.5$ dan $\alpha = 0.7$ terhadap dinamika perilaku sistem berbeda dengan efek memori yang dihasilkan oleh order fraksional $\alpha = 0.9$ dan $\alpha = 1$ (lihat Gambar 3 dan 4). Selain itu, jika nilai order fraksional sistem mendekati 1, maka waktu yang dibutuhkan untuk mengendalikan pandemi akan semakin panjang. Hal ini terlihat jelas melalui simulasi numerik bahwa dengan order fraksional $\alpha = 0.7$ dan $\alpha = 0.9$, waktu yang dibutuhkan untuk mengendalikan pandemi lebih kecil jika dibandingkan dengan order fraksional $\alpha = 1$. Oleh karena itu, Sistem (4) dengan kasus fraksional lebih memadai dan realistis untuk menggambarkan dinamika penyebaran pandemi Covid-19. Hasil penelitian ini sejalan dengan penelitian yang dilakukan oleh (Mohammed et al., 2021). Dalam penelitian tersebut, mereka menemukan bahwa model fraksional lebih lengkap dalam menjelaskan dinamika perilaku sistem. Seperti dalam penelitian ini, mereka juga menemukan bahwa pandemi Covid-19 tidak akan hilang dari lingkungan manusia secara menyeluruh. Di sisi yang lain, hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa parameter order fraksional dapat digunakan sebagai pengontrol dalam menekan kurva individu yang terinfeksi. Jadi, model seperti ini mungkin dapat menjadi salah satu dasar dalam pengambilan sebuah langkah strategis oleh para pemangku jabatan untuk memitigasi atau memperlambat laju penyebaran pandemi yang mematikan ini. Salah satu langkah yang dapat diambil adalah penanganan pasien yang terinfeksi virus sedini mungkin oleh para medis. Penanganan ini dapat mencegah peningkatan nilai order fraksional.

SIMPULAN DAN SARAN

Penelitian ini telah menyelidiki beberapa perilaku dinamis dalam model penyebaran virus Covid-19 berbasis Lotka-Volterra. Model tersebut melibatkan kasus order fraksional dan order bilangan bulat. Stabilitas lokal telah dibahas untuk kedua kasus. Berdasarkan hasil analisis kedua model di atas, model dengan order fraksional lebih

memadai dan realistis jika dibandingkan dengan model klasik. Pengaruh parameter order fraksional terhadap penyebaran pandemi ditunjukkan melalui hasil simulasi numerik. Setiap perubahan nilai order fraksional di dalam sistem selalu memberikan pengaruh yang berbeda terhadap dinamika penyebaran pandemi Covid-19. Hal ini disebabkan oleh adanya efek memori (*memory effect*). Oleh karena itu, model seperti ini mungkin dapat menjadi salah satu dasar dalam pengambilan sebuah langkah strategis oleh para pemangku jabatan untuk memitigasi atau memperlambat laju penyebaran pandemi. Salah satu langkah yang dapat diambil adalah penanganan pasien yang terinfeksi sedini mungkin oleh para medis untuk mencegah peningkatan nilai order fraksional.

Penelitian ini hanya melibatkan dua populasi ke dalam sistem. Populasi sehat tumbuh secara eksponensial, dan populasi terinfeksi tumbuh secara logistik. Selain itu, interaksi antara kedua populasi mengikuti fungsi respon Holling tipe I. Oleh karena itu, saran dalam penelitian ini berupa penambahan asumsi baru ke dalam sistem. Dengan penambahan asumsi baru tersebut, misalnya interaksi antara kedua populasi mengikuti fungsi respon Holling tipe II atau III, model yang terbentuk menjadi lebih realistis dan kompleks. Selain itu, model tersebut juga memungkinkan bagi peneliti selanjutnya untuk melakukan analisis bifurkasi pada sistem yang terbentuk.

DAFTAR PUSTAKA

- Al-Khedhairi, A., Askar, S. S., Matouk, A. E., Elsadany, A., & Ghazel, M. (2018). Dynamics, chaos control, and synchronization in a fractional-order Samardzija-Greller population system with order lying in $(0, 2)$. *Complexity*, 2018, 1–14. <https://doi.org/10.1155/2018/6719341>.
- Carcione, J. M., Santos, J. E., Bagaini, C., & Ba, J. (2020). A Simulation of a COVID-19 Epidemic Based on a Deterministic SEIR Model. *Frontiers in Public Health*, 8. <https://doi.org/10.3389/fpubh.2020.00230>.
- Chen, T.-M., Rui, J., Wang, Q.-P., Zhao, Z.-Y., Cui, J.-A., & Yin, L. (2020). A mathematical model for simulating the phase-based transmissibility of a novel coronavirus. *Infectious Diseases of Poverty*, 9(1), 24. <https://doi.org/10.1186/s40249-020-00640-3>.
- Elsadany, A. A., & Matouk, A. E. (2015). Dynamical behaviors of fractional-order Lotka–Volterra predator–prey model and its discretization. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 49(1–2), 269–283. <https://doi.org/10.1007/s12190-014-0838-6>.
- Fatmawati, Khan, M. A., Azizah, M., Windarto, & Ullah, S. (2019). A fractional model for the dynamics of competition between commercial and rural banks in Indonesia. *Chaos, Solitons & Fractals*, 122, 32–46. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.02.009>.
- Fatmawati, Shaiful, E. M., & Utoyo, M. I. (2018). A Fractional-Order Model for HIV Dynamics in a Two-Sex Population. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2018, 1–11. <https://doi.org/10.1155/2018/6801475>.
- Goel, N. S., Maitra, S. C., & Montroll, E. W. (1971). On the volterra and other nonlinear models of interacting populations. *Reviews of Modern Physics*, 43(2), 231–276. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.43.231>.
- Hernandez-Vargas, E. A., & Velasco-Hernandez, J. X. (2020). In-host mathematical modelling of Covid-19 in humans. *Annual Reviews in Control*, 50, 448–456. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2020.09.006>.
- Jamal, S. W., Suparno, S., Fauziah, F., & Anindita, M. (2024). Analisis Tipe Kompetisi, Dinamika Kestabilan, dan Peramalan Perolehan Laba Bersih Lembaga Keuangan Bank. *JAK (Jurnal Akuntansi) Kajian Ilmiah Akuntansi*, 11(2), 316–330. <https://doi.org/10.30656/jak.v11i2.7912>.
- Jamal, S. W., Suparno, S., Hadiyanti, S. U. E., Sadidah, D., & Dewi, M. (2024). The Bionomic Equilibrium Model for Balancing Forest Conservation and Economic Growth: Empirical Evidence from Indonesia. *BHUMI: Jurnal Agraria Dan Pertanahan*, 9(2), 126–140. <https://doi.org/10.31292/bhumi.v9i2.679>.
- Jamal, S. W., Suparno, S., Rashid, U. K., & Fauziah, F. (2024). Competition Dynamics of Market Share for Assets in the Banking Industry Using the Lotka-Volterra Model Approach. *ETIKONOMI*, 23(2), 299–316. <https://doi.org/10.15408/etk.v23i2.32226>.

- Jayatilaka, R., Patel, R., Brar, M., Tang, Y., Jisrawi, N. M., Chishtie, F., Drozd, J., & Valluri, S. R. (2022). A mathematical model of COVID-19 transmission. *Materials Today: Proceedings*, 54, 101–112. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2021.11.480>.
- Khan, M. A., & Atangana, A. (2020). Modeling the dynamics of novel coronavirus (2019-nCov) with fractional derivative. *Alexandria Engineering Journal*, 59(4), 2379–2389. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2020.02.033>.
- Kuniya, T., & Nakata, Y. (2012). Permanence and extinction for a nonautonomous SEIRS epidemic model. *Applied Mathematics and Computation*, 218(18), 9321–9331. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.03.011>.
- Lin, Q., Zhao, S., Gao, D., Lou, Y., Yang, S., Musa, S. S., Wang, M. H., Cai, Y., Wang, W., Yang, L., & He, D. (2020). A conceptual model for the coronavirus disease 2019 (COVID-19) outbreak in Wuhan, China with individual reaction and governmental action. *International Journal of Infectious Diseases*, 93, 211–216. <https://doi.org/10.1016/j.ijid.2020.02.058>.
- Lotka, A. J. (1925). *Elements of physical biology*. Williams & Wilkins Company, Baltimore.
- Matignon, D. (1996). Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. *Computational Engineering in System Application*, 2, 963.
- Matouk, A. E. (2009). Chaos synchronization between two different fractional systems of Lorenz family. *Mathematical Problems in Engineering*, 2009(1). <https://doi.org/10.1155/2009/572724>.
- Matouk, A. E., & Elsadany, A. A. (2016). Dynamical analysis, stabilization and discretization of a chaotic fractional-order GLV model. *Nonlinear Dynamics*, 85(3), 1597–1612. <https://doi.org/10.1007/s11071-016-2781-6>.
- Matouk, A. E., Elsadany, A. A., Ahmed, E., & Agiza, H. N. (2015). Dynamical behavior of fractional-order Hastings–Powell food chain model and its discretization. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 27(1–3), 153–167. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2015.03.004>.
- Mohammed, W. W., Aly, E. S., Matouk, A. E., Albosaily, S., & Elabbasy, E. M. (2021). An analytical study of the dynamic behavior of Lotka-Volterra based models of COVID-19. *Results in Physics*, 26, 104432. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2021.104432>.
- Podlubny, I. (1999). *Fractional differential equations*. San Diego: Academic Press.
- Volterra, V. (1926). *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*. *Memoria Della Reale Accademia Nazionale Dei Lincei*, 2, 31–113.
- WHO. (2024). *Coronavirus disease (Covid-19)*. World Health Organization.
- Wu, Z., & McGoogan, J. M. (2020). Characteristics of and Important Lessons From the Coronavirus Disease 2019 (COVID-19) Outbreak in China. *JAMA*, 323(13), 1239. <https://doi.org/10.1001/jama.2020.2648>.
- Zhu, N., Zhang, D., Wang, W., Li, X., Yang, B., Song, J., Zhao, X., Huang, B., Shi, W., Lu, R., Niu, P., Zhan, F., Ma, X., Wang, D., Xu, W., Wu, G., Gao, G. F., & Tan, W. (2020). A novel coronavirus from patients with pneumonia in China, 2019. *New England Journal of Medicine*, 382(8), 727–733. <https://doi.org/10.1056/NEJMoa2001017>.