

Tabel.2. Habitat beberapa spesies nyamuk yang ditemukan pada ketinggian 500 - 1000 meter diatas permukaan laut di Jawa Tengah.

| Spesies                             | Habitat |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-------------------------------------|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
|                                     | Si      | Sw | Tb | Tk | Rw | Cs | La | Kt | Kp | Bs | Pb | Ps | Bm | As |
| <i>Anopheles</i>                    |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>An. aconitus</i>                 |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>An. barbirostris</i>             |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>An. vagus</i>                    |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>An. subpictus</i>                |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>An. tessellatus</i>              |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>An. maculatus</i>                |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>An. sandalcatus</i>              |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>An. kochi</i>                    |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>An. pedicularis</i>              |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>An. nigerrimus</i>               |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>An. annularis</i>                |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>An. flavirostris</i>             |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>An. indefinicus</i>              |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>Culex</i>                        |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>Cx. pipiens quinquefasciatus</i> |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>Cx. tritaeniorhynchus</i>        |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>Cx. bitaeniorhynchus</i>         |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>Cx. vishnui</i>                  |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>Cx. gelidus</i>                  |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>Cx. fuscocephalus</i>            |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>Cx. fragilis</i>                 |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>Cx. (lutzioid) sp.</i>           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>Aedes</i>                        |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>Ae. poellus</i>                  |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>Ae. albopictus</i>               |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>Ae. aegypti</i>                  |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>Armigeres</i>                    |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>Ar. subalbatus</i>               |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>Ar. kochingensis</i>             |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>Mansonia</i>                     |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>Mn. uniformis</i>                |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>Malaya</i>                       |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <i>Malaya sp</i>                    |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |

\* = ditemukan  
 Si = sungai, Sw = sawah, Tb = tambak, Tk = tempurung kelapa, Rw = Rawa, Cs = genangan air hujan, La = luanan air sungai, Kt = ketiak daun talas, Kp = ketiak daun pisang, Bs = genangan air pada batu sungai, Pb = poongan bambu, Ps = Perit sawah, Bm = bak mandi.

## PENERAPAN FUNGSI NISBAH DALAM ELEKTRODINAMIKA

Oleh :

Bambang Ruwanto dan Al. Maryanto  
 Staf Pengajar FMIPA UNY

### Abstract

Analyzes about characteristics of quotient function  $Q(x) = (1-x)/(1+x)$  have been done, where  $x$  was scalar variable. The result of the analyzes showed that quotient function had inverse character and it can be developed for two variables of multiplication or more. Application of quotient function in electrodynamics for calculation of reflection coefficient on reflection wave on boundary plane produces simple formulation for  $r^{TE}$  and  $r^{TM}$ . The result is very useful, because mathematics calculation can be done easily.

Keywords: quotient function, electrodynamics.

### PENDAHULUAN

Fungsi nisbah (*quotient function*) atau fungsi rasional memegang peranan penting dalam fisika. Dalam penerapannya fungsi ini banyak dijumpai misalnya dalam elektrodinamika dan teori relativitas khusus. Sebagai contoh, hubungan antara impedansi dan koefisien refleksi pada pemantulan di bidang batas dapat dinyatakan dalam fungsi nisbah. Dalam merumuskan koefisien refleksi ini biasanya memerlukan analisis matematika yang rumit dan berulang-ulang. Sebagai gambaran mengenai

perumusan ini dapat dilihat pada formulasi koefisien transmisi dan refleksi pada lapisan ganda (Bambang Ruwanto, 1999: 5-9). Analisis matematika yang berulang-ulang ini dapat dihindari dengan menerapkan aturan-aturan yang berlaku pada fungsi nisbah. Di samping formulasi yang dihasilkan menjadi lebih sederhana, penggunaan fungsi nisbah ini sangat bermanfaat terutama untuk menghindari kesalahan akibat analisis matematika yang rumit.

Secara umum fungsi nisbah ini dapat dibedakan menjadi tiga, yaitu: fungsi nisbah yang melibatkan variabel skalar, vektor, dan *dyadic*. Dalam artikel ini akan dibatasi pada fungsi nisbah yang melibatkan variabel skalar. Mula-mula akan dibahas beberapa aturan yang melibatkan fungsi nisbah. Kemudian pembahasan akan dikembangkan pada peranan fungsi nisbah dalam elektrodinamika, khususnya pada pemantulan gelombang elektromagnetik di bidang batas.

Berdasarkan uraian yang telah dikemukakan di atas, artikel ini akan membahas permasalahan berikut ini.

1. Bagaimanakah sifat-sifat yang berlaku dalam fungsi nisbah?
2. Bagaimanakah penerapan fungsi nisbah pada pemantulan gelombang elektromagnetik di bidang batas?

### Tinjauan Pustaka

Fungsi nisbah  $Q$  (*quotient function*,  $Q$  function) untuk variabel skalar  $x$  didefinisikan sebagai

$$Q(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad (1)$$

Beberapa nilai khusus berkaitan dengan definisi (1) adalah

$$Q(0) = 1, Q(1) = 0, Q(\infty) = Q(-\infty) = -1, \text{ dan } Q(-1) = \infty \quad (2)$$

Untuk variabel imajiner  $i$ , berlaku hubungan berikut:

$$Q(i) = -i \text{ dan } Q(-i) = i \quad (3)$$

Invers dari fungsi  $Q$  adalah fungsi  $Q$  itu sendiri, sebab  $Q[Q(x)] = x$  atau  $Q^{-1}(x) = Q(x)$ . Dalam kaitan ini, jika  $Q(x) = y$  maka  $Q(y) = x$ .

Di samping sifat-sifat di atas, beberapa hubungan berikut ini dapat dibuktikan dengan mudah (Lindell dan Sihvola, 1997: 197).

$$Q\left(\frac{1}{x}\right) = -Q(x) \text{ maka } Q[-Q(x)] = \frac{1}{x} \quad (4)$$

dan

$$Q(-x) = \frac{1}{Q(x)} \text{ maka } Q\left[\frac{1}{Q(x)}\right] = -x \quad (5)$$

Untuk perkalian dua variabel terdapat kaitan berikut:

$$Q(ab) = \frac{Q(a) + Q(b)}{1 + Q(a)Q(b)}, \quad Q[Q(a)Q(b)] = \frac{a + b}{1 + ab} \quad (6)$$

$$Q\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{Q(a) - Q(b)}{1 - Q(a)Q(b)}, \quad Q\left[\frac{Q(a)}{Q(b)}\right] = \frac{a - b}{1 - ab} \quad (7)$$

Dengan demikian,

$$Q\left(\frac{a+b}{1+ab}\right) = Q(a)Q(b) \text{ dan } Q\left(\frac{a-b}{1-ab}\right) = \frac{Q(a)}{Q(b)} \quad (8)$$

Kita dapat mengembangkan ungkapan (8) menjadi persamaan berikut:

$$Q[Q(a)Q(b)Q(c)] = \frac{a + b + c + abc}{1 + ab + bc + ac} \quad (9)$$

Fungsi nisbah dengan variabel skalar sebagaimana telah diuraikan di atas dapat dikembangkan menjadi fungsi eksponensial, hiperbolik atau trigonometri. Hal ini dapat dilakukan dengan

mengganti variabel  $x$  pada Persamaan (1) dengan variabel berbentuk eksponensial, yaitu  $e^\varphi$ . Sebagai contoh,

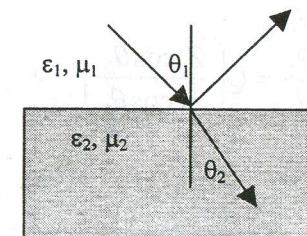
$$Q(e^\varphi) = \frac{1 - e^\varphi}{1 + e^\varphi} = -\tanh\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad Q(\tanh \varphi) = e^{-2\varphi} \quad (10)$$

$$Q(e^{i\varphi}) = \frac{1 - e^{i\varphi}}{1 + e^{i\varphi}} = -i \tanh\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad Q(i \tanh \varphi) = e^{-2i\varphi} \quad (11)$$

### PEMBAHASAN

Gambar 1 menunjukkan permukaan batas antara dua medium isotropis 1 dan 2 dengan parameter berturut-turut  $\epsilon_1, \mu_1$  dan  $\epsilon_2, \mu_2$ . Impedansi gelombang didefinisikan sebagai

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}, \quad Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \quad (12)$$



Gambar 1. Pembiasan dan pemantulan cahaya pada bidang batas

Koefisien refleksi pada polarisasi  $TE$  dan  $TM$  berturut-turut dapat dinyatakan dengan ungkapan (Portis, 1978: 495 – 496).

$$r^{TE} = \frac{Z_2 \cos \theta_1 - Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2} \quad (13)$$

dan

$$r^{TM} = \frac{Z_2 \cos \theta_2 - Z_1 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_2 + Z_1 \cos \theta_1} \quad (14)$$

dengan  $\theta_1$  dan  $\theta_2$  berturut-turut menunjukkan sudut datang dan sudut bias. Mengingat definisi fungsi nisbah, ungkapan (13) dan (14) dapat dituliskan sebagai

$$r^{TE} = \frac{1 - \frac{Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1}}{1 + \frac{Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1}} = Q\left(\frac{Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1}\right) \quad (15)$$

dan

$$r^{TM} = \frac{1 - \frac{Z_1 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_2}}{1 + \frac{Z_1 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_2}} = Q\left(\frac{Z_1 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_2}\right) \quad (16)$$

Dari sifat invers fungsi nisbah, Persamaan (15) dan (16) dapat dinyatakan sebagai

$$Q(r^{TE}) = \frac{Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1} \quad (17)$$

dan

$$Q(r^{TM}) = \frac{Z_1 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_2} \quad (18)$$

Dengan demikian,

$$Q(r^{TE})Q(r^{TM}) = \frac{Z_1^2}{Z_2^2} = \frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2} \quad (19)$$

$$\frac{Q(r^{TM})}{Q(r^{TE})} = \frac{\cos^2 \theta_1}{\cos^2 \theta_2} \quad (20)$$

Hubungan antara dua koefisien refleksi ini memungkinkan untuk menentukan  $r^{TE}$  dan  $r^{TM}$  jika parameter  $Z_1$  dan  $Z_2$  atau  $\theta_1$  dan  $\theta_2$  diketahui.

Sebagai contoh, diandaikan  $r^{TE}$  diketahui. Diperkenalkan variabel baru  $R$  dan  $S$  dalam bentuk (Lindell dan Sihvola, 1997: 199).

$$R = Q\left(\frac{Z_1^2}{Z_2^2}\right) = \frac{Z_2^2 - Z_1^2}{Z_2^2 + Z_1^2} \quad (21)$$

$$S = Q\left(\frac{\cos^2 \theta_1}{\cos^2 \theta_2}\right) = \frac{\cos^2 \theta_2 - \cos^2 \theta_1}{\cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_1} \quad (22)$$

Dengan variabel  $R$  dan  $S$  ini,  $r^{TM}$  pada (18) dapat dituliskan sebagai

$$r^{TM} = Q\left(\frac{Z_1 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_2}\right) = Q\left(\frac{Z_1^2 / Z_2^2}{Z_1 \cos \theta_1 / Z_2 \cos \theta_1}\right) = Q\left[\frac{Q(R)}{Q(r^{TE})}\right]$$

Mengingat sifat (7), diperoleh

$$r^{TM} = \frac{R - r^{TE}}{1 - Rr^{TE}} \quad (23)$$

Dalam formulasi yang berbeda,  $r^{TM}$  pada (18) dapat pula dinyatakan dengan pernyataan berikut.

$$r^{TM} = Q[Q(r^{TE})Q(S)] \quad (24)$$

Mengingat sifat (6), maka

$$r^{TM} = \frac{S + r^{TE}}{1 + Sr^{TE}} \quad (25)$$

Dengan analisis yang sama, jika  $r^{TM}$  diketahui, maka:

$$r^{TE} = \frac{R - r^{TM}}{1 - Rr^{TM}} \quad (26)$$

atau

$$r^{TE} = \frac{r^{TM} - S}{1 - Sr^{TM}} \quad (27)$$

Dari uraian di atas, dapat dilihat beberapa formulasi yang sangat sederhana. Sebagai contoh, jika  $r^{TE} = \pm 1$  maka dapat

disimpulkan bahwa pada bahan tidak terdapat  $\varepsilon$  dan  $\mu$ . Untuk medium takmagnetik  $\mu_1 \cong \mu_2 \cong \mu_0$ , sehingga

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}}{\sqrt{\mu_2/\varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

Dengan demikian, hukum Snellius pada permukaan bidang batas dapat dituliskan sebagai (Guenther, 1990: 69)

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}}{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} = \frac{Z_2}{Z_1} \quad (28)$$

Sehingga formulasi  $r^{TE}$  dan  $r^{TM}$  pada (13) dan (14) menjadi

$$r^{TE} = \frac{-\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \quad (29)$$

$$r^{TM} = \frac{\tan(\theta_2 - \theta_1)}{\tan(\theta_2 + \theta_1)} \quad (30)$$

Jika  $\theta_1$  sudut Brewster maka  $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ , sehingga  $r^{TE} = 0$  dan  $r^{TM} = R$  atau  $r^{TM} = 0$  dan  $r^{TE} = R$ .

Untuk gelombang yang datang secara tegak lurus dengan bidang batas  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ , sehingga  $S = 0$  dan dua koefisien

refleksi akan mempunyai nilai yang sama:  $r^{TM} = r^{TE} = r^{TEM}$ . Dalam kaitan ini, Persamaan (19) menjadi

$$[Q(r^{TEM})]^2 = \frac{Z_1^2}{Z_2^2} = Q(R) \text{ atau } Q(r^{TEM}) = \frac{Z_1}{Z_2} \quad (31)$$

Dengan mengingat sifat invers fungsi nisbah, ungkapan (31) menjadi

$$r^{TEM} = Q\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad (32)$$

Ini tidak lain merupakan keadaan khusus dari (13) dan (14) jika  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ .

## SIMPULAN

Sifat-sifat fungsi nisbah (*quotient function, Q function*)

$Q(x) = (1-x)/(1+x)$ , di antaranya adalah:

1. Invers dari fungsi  $Q$  adalah fungsi  $Q$  itu sendiri, yaitu  $Q[Q(x)] = x$  atau  $Q^{-1}(x) = Q(x)$ . Berkaitan dengan sifat ini, jika  $Q(x) = y$  maka  $Q(y) = x$ .

2. Untuk perkalian dengan dua variabel berlaku

$$Q(ab) = \frac{Q(a) + Q(b)}{1 + Q(a)Q(b)} \text{ dan } Q\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{Q(a) - Q(b)}{1 - Q(a)Q(b)}$$

Penerapan fungsi nisbah pada pemantulan di bidang batas akan memberikan formulasi koefisien refleksi  $r^{TE}$  dan  $r^{TM}$  yang sederhana. Hal ini tercermin pada ungkapan

$$r^{TE} = \frac{R - r^{TM}}{1 - Rr^{TM}} \text{ atau } r^{TE} = \frac{r^{TM} - S}{1 - Sr^{TM}}$$

dan

$$r^{TM} = \frac{R - r^{TE}}{1 - Rr^{TE}} \text{ atau } r^{TM} = \frac{S + r^{TE}}{1 + Sr^{TE}}$$

dengan  $R = \frac{Z_2^2 - Z_1^2}{Z_2^2 + Z_1^2}$  dan  $S = \frac{\cos^2 \theta_2 - \cos^2 \theta_1}{\cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_1}$ .

## DAFTAR PUSTAKA

- Bambang Ruwanto. (1997). *Formulasi Koefisien Transmisi dan Refleksi pada Lapisan Ganda*. (Karya ilmiah untuk jabatan Asisten Ahli). Yogyakarta: FPMIPA IKIP YOGYAKARTA.
- Guenther, R. (1990). *Modern Optics*. New York: John Wiley and Sons.
- Lindell, I.V. and Sihvola, A.H. (1997). *The Quotient Function and Its Applications*. American Journal Physics 66 (3): 197 - 202.
- Portis, A.M. (1978). *Electromagnetics Fields: Sources and Media*. New York: John Wiley and Sons.